

کنترل آشوب

(نسخه ۱ - تیر ماه ۱۳۸۳ خورشیدی)

امیرمسعود فرهمند^۱ - بابک نجار اعرابی^۲ - کارو لوکاس^۳

گروه برق و کامپیوتر - دانش کده فنی - دانش گاه تهران

آشوب چیست؟

مفهوم آشوب، یکی از مفاهیم جدید و بنیادی علم نوین است که افق درک ما نسبت به هستی را بسیار گسترش داده است. آشوب - همان طور که از نامش پیداست - رفتاری به ظاهر تصادفی و بی‌نظم است که در بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی رخ می‌دهد. پدیده‌های معروفی چون اثر پروانه‌ای^۴ از ویژگی‌های خاص آشوب است که به زودی در موردشان توضیح خواهیم داد. در این نوشتار جز مقدمه‌ای کوتاه و چند تعریف ریاضی، چندان به خود تئوری آشوب نمی‌پردازم ولی با این حال یادآوری مجدد ویژگی‌های آن بی‌فایده نخواهد بود.

می‌دانیم که ابزار تحلیل پدیده‌های طبیعی برای فیزیک‌دانان و مهندسان و بقیه‌ی علوم که نیاز به مدل‌سازی و تحلیل آن پدیده‌ها با استفاده از آن مدل دارند، معادلات دیفرانسیل (یا معادلات تفاضلی) است. این معادلات که می‌توانند به صورت جزیی^۵ یا معمولی^۶ باشند، چارچوب تحلیلی قوی‌ای برای همه‌ی دانش‌مندان علوم طبیعی فراهم می‌کنند. در بسیاری از موارد برای سادگی تحلیل، مدل‌ها به صورت خطی تقریب زده می‌شوند. در این صورت ابزارهای ریاضی کامل‌ای برای تحلیل این چنین مسائلی وجود دارد. با این حال به محض این که چنین ساده‌سازی‌ای انجام ندهیم، با معادلات غیرخطی‌ای مواجه شویم که پدیده‌های جدیدی چون چرخه حدی^۷ در آن‌ها مشاهده می‌شود. اما این تنها رفتار متفاوت دینامیک غیرخطی با خطی نیست. مدت‌ها به دلیل وجود قضیه‌ی پوانکاره-بندیکسون^۸ تصور می‌شد که یک سیستم یا دارای نقطه‌ی تعادل (چه پایدار و چه ناپایدار) است و یا دارای چرخه‌ی حدی‌ست. البته این قضیه تنها برای سیستم‌های مرتبه دوم صادق بود، اما باور عموم بر آن بود که چنین قضیه‌ای برای سیستم‌های مرتبه‌ی بالاتر نیز برقرار است. با این حال مشاهده شد که برای سیستم‌های مرتبه سه به بالا، پدیده‌ی دیگری نیز علاوه بر این‌ها رخ می‌دهد و آن هم آشوب است.

آشوب - به مفهوم دقیق و ریاضی آن - پدیده‌ایست به ظاهر تصادفی و پیچیده که در باطن طبیعتی قطعی^۹ (در تقابل با تصادفی^{۱۰}) دارد. به عبارت دیگر از یک معادله‌ی دیفرانسیل ساده می‌توان رفتارهای بسیار پیچیده‌ای را انتظار داشت. نمونه‌ای از دینامیک مرتبه‌ی سوم آشوب‌ناک را که به دینامیک لورنتس^{۱۱} مشهور است، در زیر می‌بینید.

¹ SoloGen@SoloGen.net

² Araabi@ut.ac.ir

³ lucas@ipm.ir

⁴ Butterfly Effect

⁵ Partial Differential Equation (PDE)

⁶ Ordinary Differential Equation (ODE)

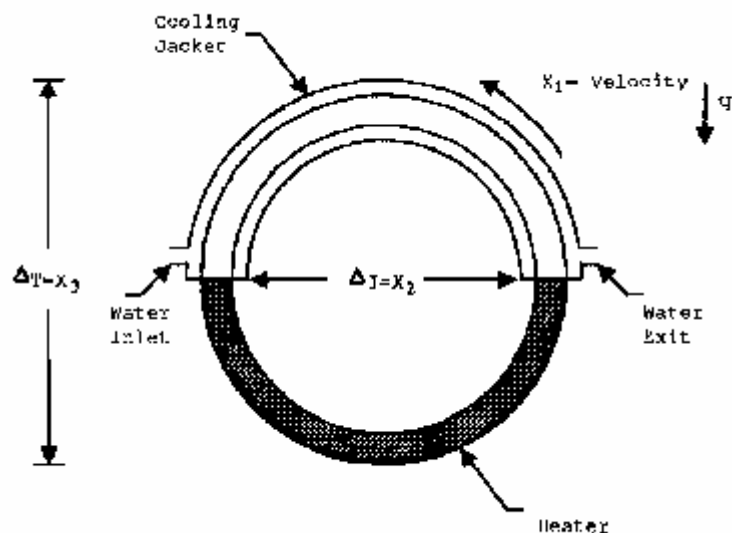
⁷ Limit Cycle

⁸ Poincaré-Bendixon

⁹ Deterministic

¹⁰ Stochastic

¹¹ Lorenz



شکل 1. نمونه‌ای از آزمایش‌ای که منجر به معادلات دیفرانسیل لورنس می‌شود. x_1 (نشان داده شده در x در معادلات داخل متن) متوسط سرعت چرخش سیال، x_2 (نشان داده شده با y) فاصله تفاوت دمای افقی و x_3 (نشان داده شده با z) تفاوت دمای عمودی است.

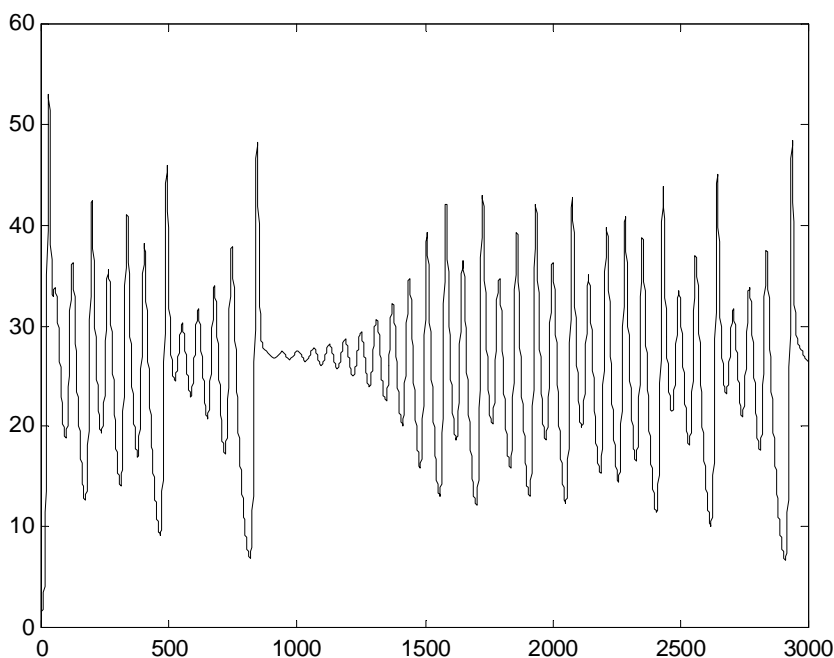
$$\begin{cases} \dot{x} = s(y - x) + u \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1)$$

دینامیک لورنز که توسط هواشناسی به نام ادوارد لورنتس^{۱۲} در سال ۱۹۶۳ به دست آمده است، بیان‌گر جریان هم‌رفت در مایعاتی است که گرما از طریق منبع‌ای به آن‌ها تزریق می‌شود. نمونه‌ای از ترکیب‌بندی‌ای که منجر به دینامیک لورنتس می‌شود را در شکل (۱) می‌بینید. لورنتس نشان داد که تلاطم^{۱۳} در آن مایعات توسط دینامیک ساده شده‌ی لورنز قابل بیان است [Lorenz63]. نمونه‌ای از رفتار آشوبی این دینامیک را در شکل (۲) می‌بینید.

یکی از ویژگی‌های سیستم آشوبی، چیزی است که به حساسیت بالا به شرایط اولیه مشهور شده است. یک سیستم آشوب‌ناک برخلاف سیستم دارای چرخه‌ی حدی یا نقطه‌ی تعادل پایدار- به تغییرات کوچک حالت‌اش حساس است. تغییر بسیار کوچکی در حالت اولیه باعث تغییرات بسیار قابل توجه در شرایط نهایی می‌شود. نمونه‌ی معروف چنین پدیده‌ای وضعیت آب و هوا و پدیده‌ی معروف اثر پروانه‌ایست. دینامیک غیرخطی جو باعث می‌شود که به دلیل نداشتن همه‌ی شرایط اولیه در زمان شروع محاسبات (مثلاً نداشتن و هم‌چنین عدم دقت اندازه‌گیری دما و رطوبت و ... در همه‌ی نقاط سطح زمین)، پیش‌بینی طولانی مدت امکان‌پذیر نباشد. مثال مشهوری است که می‌گوید بال زدن پروانه‌ای در کشوری دیگر می‌تواند باعث به وجود آمدن یا نیامدن توفان در کشور شما شود. نمونه‌ای از این حساسیت را در شکل (۳) می‌بینید. در این شکل، دینامیک لورنتس به ازای دو شرایط اولیه‌ی بسیار نزدیک به هم (با خطای

¹² Edward Lorenz

¹³ Turbulent



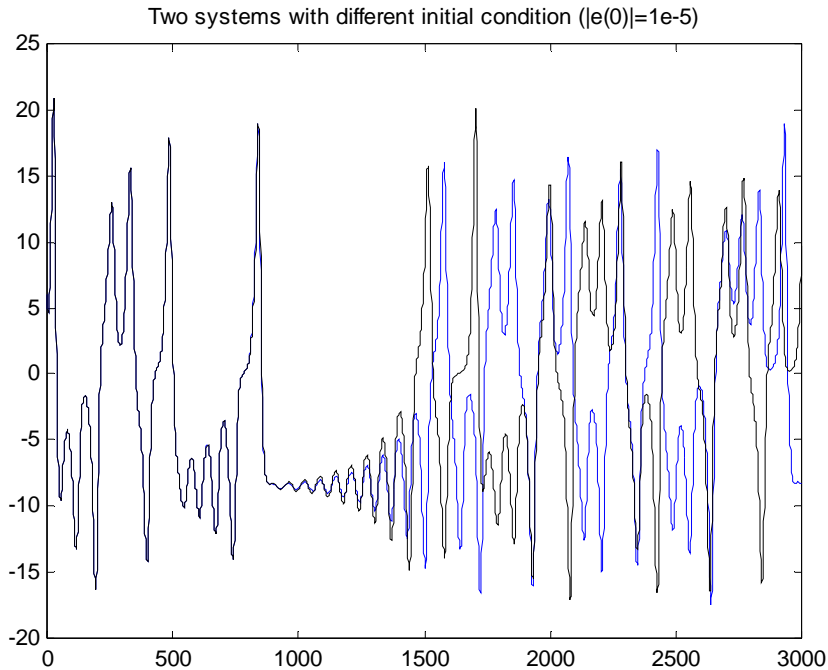
شکل 2. رفتار آشوبی دینامیک لورنتس

اولیه‌ی $|e(0)| = 10^{-5}$ با هم مقایسه شده است. می‌بینید که با این که در ابتدا این دو بسیار شبیه به هم رفتار می‌کنند، با این حال در نهایت رفتار کاملاً متفاوتی پیدا می‌کنند. ویژگی‌ی دیگر سیستم‌های آشوبی، داشتن جاذب‌های شگفت^{۱۴} است. به طور کیفی، جاذب‌های شگفت، جاذب‌هایی هستند که مسیر حالت به سمت آن‌ها جذب می‌شود و در همان حال از آن‌ها دور می‌شود. نمونه‌ی چنین جاذبی را در شکل (۴) مشاهده می‌کنید که مسیر فاز دینامیک لورنتس را نمایش می‌دهد. نمونه‌های دیگری از چنان چیزی نیز در بقیه‌ی این گزارش خواهد آمد. جاذب‌های شگفت دارای بعد فراکتالی و غیرصیح هستند. از ویژگی‌های دیگر آشوب، وجود طیف فرکانسی پیوسته است. می‌دانیم اگر سیستمی دارای رفتار تناوبی باشد، دارای طیف گسسته‌ایست، اما در سیستم‌های آشوبی، طیف پیوسته خواهد بود مقایسه‌ای بین طیف گسسته‌ی رفتاری تناوبی و طیف پیوسته‌ی رفتار آشوبی را در شکل (۵) می‌بینید.

کنترل آشوب چیست؟

به دلیل دینامیک پیچیده و ناپایداری ذاتی سیستم آشوبی، ایده‌ی کنترل آن - به طوری که رفتار مورد نظر را از خود نشان دهد - ممکن نمی‌نماید. با این حال نشان داده شده است که سیستم‌های آشوبی قابلیت کنترل شونده‌ی دارند و اهداف کنترلی متفاوتی برای‌شان قابل تصور است. ایده‌های کنترل غیرخطی برای آن‌ها قابل اعمال است و علاوه بر این، به دلیل ویژگی‌های خاص خود، روش‌های کنترلی جدید و خاص خودی نیز قابل اعمال است. در این مورد در بخش‌های بعد به تفصیل توضیح خواهیم داد و تنها به این اشاره می‌کنم که اهداف مختلف کنترلی‌ای برای یک سیستم آشوبی قابل تصور است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

¹⁴ Strange Attractor



شکل 3. مقایسه رفتار آشوبی دینامیک لورنتس به ازای دو شرایط اولیه بسیار نزدیک

- حذف رفتار آشوبی و پایدارسازی به نقطه‌ی تعادل
- پایدارسازی یکی از مسیرهای متناوب ناپایدار¹⁵ (و ایجاد چرخه‌ی حدی پایدار)
- هم‌زمانی¹⁶ دو سیستم آشوبی
- پادکنترل آشوب¹⁷ (ضدکنترل آشوب – آشوب‌سازی¹⁸)
- کنترل دوشاخگی¹⁹

مورد اول و دوم واضح‌اند. سیستمی دارای رفتار آشوبی است و این رفتار برای ما مطلوب نیست. مثلا این می‌تواند نوسان آشوبی غیرقابل قبول در روتور یک موتور باشد. حذف چنان چیزی لازم است. هم‌زمانی دو سیستم آشوبی نیز به معنای این است که بخواهیم حالت دو سیستم آشوبی دقیقا مشابه هم شوند. چنین کاری در کاربردهایی مانند مخابرات مطرح می‌شود. در مورد این‌ها به طور کامل در بخش‌های بعدی توضیح خواهیم داد. پادکنترل آشوب، مورد دیگری است که جدیداً توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. چنین کاری به آن معناست که سیستمی را که به خودی خود دارای رفتار آشوبی‌ای نیست (مثلا به نقطه‌ی تعادلی پایدار است)، رفتار آشوبی پیدا کند. وجود آشوب در بعضی از موارد چون میکس کردن مواد مختلف و کنترل ضربان قلب لازم است. کنترل دوشاخگی نیز با این‌که دقیقا جزو کنترل آشوب محسوب نمی‌شود، اما به آن ارتباط دارد. با این‌که در این‌جا توضیح چندانی درباره‌ی آن داده نمی‌شود، اما دوشاخگی یکی از پدیده‌هایی است که پیش از آشوبی شدن سیستم رخ می‌دهد. دوشاخگی به طور خلاصه به آن معناست که رفتار

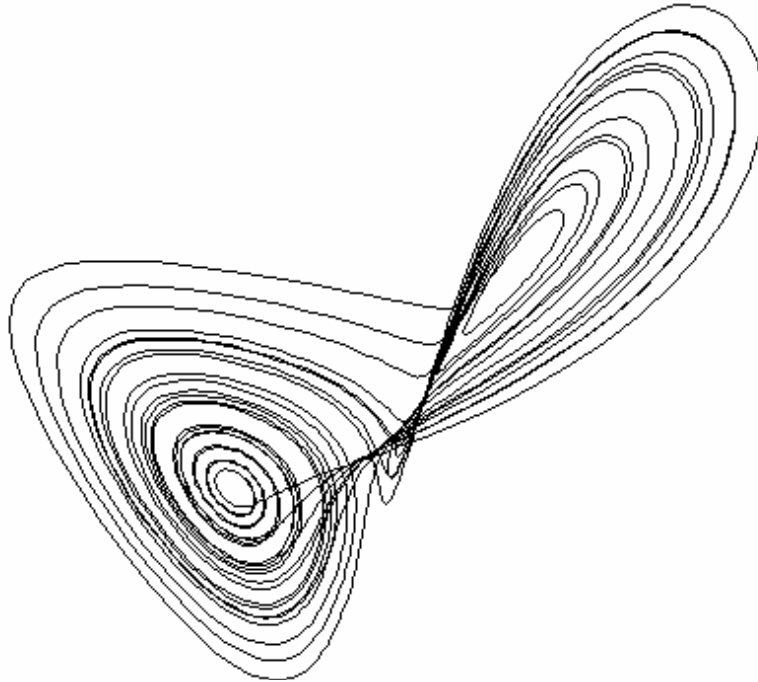
¹⁵ Unstable Periodic Orbit

¹⁶ Synchronization

¹⁷ Anticontrol of Chaos

¹⁸ Chaotification

¹⁹ Bifurcation Control



شکل 4. نمونه‌ای از رفتار دینامیک لورنس به ازای $s = 10$ ، $r = 28$ و $b = 8/3$

ساختاری سیستم (مکان نقاط تعادل، پایداری آن‌ها، تعداد نقاط تعادل، وجود یا عدم وجود نقطه‌ی تعادل و هم‌چنین وجود چرخه‌های حدی با همین مشخصات و حالات) با تغییر پارامتری، عوض شود. در کنترل دوشاخگی یکی از دو هدف (۱) به عقب انداختن (یا جلو انداختن) دوشاخگی و (۲) تغییر نوع دوشاخگی (پایدار، ناپایدار و ...) مورد نظر است. ارتباط دوشاخگی با آشوب از آن‌جا که معمولاً پیش از آشوبی شدن یک سیستم، چندین و چند دوشاخگی رخ می‌دهد، مشخص است. با عقب انداختن دوشاخگی می‌توان آشوب را به تاخیر انداخت.

کاربردهای کنترل آشوب

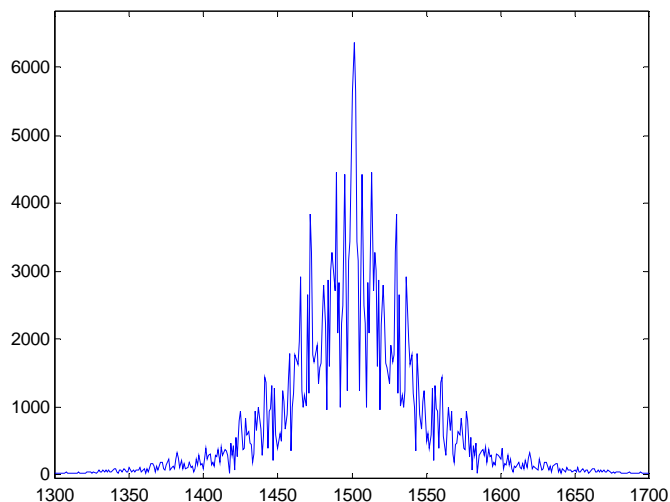
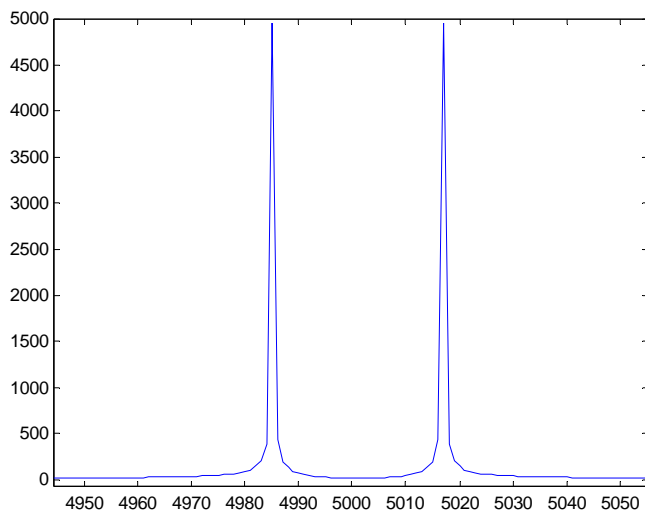
در این بخش به معرفی‌ی بعضی از کاربردهای کنترل (یا پادکنترل) آشوب می‌پردازیم. برای جمع‌آوری‌ی این فهرست خلاصه تنها نگاهی به کاربردهای مقالات تئوری‌ی کنترل آشوب چند سال اخیر شده است. برای همین ارجاعات داده شده الزاماً به اولین مورد استفاده از کنترل آشوب برای آن موارد برنمی‌گردد.

در [Roy93] یکی از اولین کاربردهای کنترل آشوب گزارش شده است. هدف آن‌ها پایدارسازی‌ی شدت روشنایی^{۲۰} خروجی‌ی آشوبی لیزر بوده است. با استفاده از روش OPF توانستند تا حد ۱۵ برابر توان خروجی را افزایش دهند. از روش‌های کنترل آشوب برای پایدار کردن UPO در مدارهای الکترونیک قدرت نیز استفاده شده است. به عنوان مثال به [Kousaka01] مراجعه کنید. علاوه بر این‌ها از کنترل آشوب برای موارد پزشکی نیز استفاده شده است. به عنوان نمونه در [Garfinke192] از تکنیک‌های کنترل آشوب برای حذف آریتمی^{۲۱} قلبی استفاده شده است. هم‌چنین در [Brandt00] از روش TDFC برای کنترل مدلی از فیبری^{۲۲} شدن استفاده شده است. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، کنترل آشوب اخیراً در مخابرات کاربرد بسیار زیادی پیدا کرده است. برای خلاصه‌ای از کاربردهای آن در مخابرات ایمن به

²⁰ Intensity

²¹ Arrhythmias

²² Ventricular Fibrillation



شکل 5. مقایسه طیف فرکانسی بین حرکت متناوب (چپ) و حرکت آشوبی (راست). مشاهده می‌شود که برخلاف دینامیک متناوب، دینامیک آشوبی، طیف پیوسته‌ای دارد (صفر نبودن و عرض داشتن طیف حرکت تناوبی به دلیل خطای محاسبات عددی و محدود بودن پنجره‌ی تبدیل فوریه است).

[Yang04] مراجعه کنید. هم‌چنین فهرستی از کاربردهای روش کنترل ضربه‌ای در مخابرات به [Suykens00] مراجعه کنید. هم‌چنین در [Chen03] برای حل مسأله‌ی کنترل ترافیک شبکه^{۲۳} استفاده شده است. در [Vincent00]، آونگ معکوسی را با تزریق سیگنال خارجی‌ای ابتدا آشوبی می‌کند و سپس با روش‌های کنترل آشوبی آن را کنترل می‌کند. هدف از چنین کاری، انجام طراحی‌ی محلی برای سیستم ذاتا غیرخطی‌ست. طراحی‌ی محلی تضمین می‌کند که در صورت نزدیک شدن به اندازه‌ی کافی به نقطه‌ی کار، پایداری صورت می‌گیرد و با استفاده از آشوبی‌سازی می‌توان مطمئن بود که چنین نزدیک‌شدنی رخ خواهد داد.

برای اطلاعات بیش‌تر در مورد کاربردهای کنترل آشوب می‌توان به [Andrevskii04] رجوع کنید. در آن مقاله تنها به کاربردهای کنترل آشوب پرداخته شده است. از میان کاربردهای معرفی شده می‌توان به مواردی چون کنترل آونگ‌ها، ژيروسکوپ، توپ جهنده، مقابله با نوسانات کشتی، تلاطم در مایعات، کنترل رفتار چند-مدی^{۲۴} در لیزر، حذف یا ایجاد حالت آشوبی در واکنش شیمیایی موسوم به Belousov-Zhabotinsky و هم‌چنین هم‌زنی‌ی آشوب‌ناک برای سرعت یافتن فرآیند مخلوط شدن، کنترل جمعیت حشرات^{۲۵} با تغییر اندک در تعداد حشرات بالغ، و حذف حالت‌های صرع‌ای در حیوانات اشاره کرد.

تعاریف ریاضی آشوب

با وجود آن‌که ویژگی‌های سیستم آشوبی (حساسیت به شرایط اولیه، وجود جاذب شگفت، طیف پیوسته و ...) تقریباً واضح است و هم‌چنین با مشاهده‌ی رفتار یک سیستم می‌توان نسبت به آشوبی بودن یا نبودن آن اظهارنظر کرد، اما تعریف دقیق و همه‌باوری از آشوب وجود ندارد. البته چنین چیزی تا حدی قابل‌تصورست چون آشوب پیش از آن‌که یک مفهوم

²³ Internet Congestion Control

²⁴ Multimode behavior

کاملاً ریاضی باشد، مفهومی است که ریشه‌های‌اش از حوزه‌ی ادراک انسان و هم‌چنین زبان طبیعی‌ی او وارد علم شده است. ایجاد تئوری‌ای که همه‌ی درک انسان نسبت به چنین پدیده‌ی نیمه‌عینی^{۲۶} - نیمه‌ذهنی^{۲۷}‌ای را پوشش دهد، کار ساده‌ای نیست. با این همه چندین تعریف ریاضی‌ی مختلف برای آشوب وجود دارد که کم و بیش قابل قبول‌اند. در این بخش تنها به معرفی بعضی از این تعاریف می‌پردازم و چندان وارد جزئیات‌شان نمی‌شود. تنها ذکر این نکته قابل توجه است که قضایایی که در انتهای این بخش خواهند آمد در اثبات آشوبی بودن نتیجه‌ی روش‌های پادکنترل آشوب به کار گرفته می‌شوند.

دینامیک زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x &\in D \subset \mathbb{R}^n, f : D \mapsto \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2)$$

تعاریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف مجموعه جذب‌کننده: مجموعه B_0 ، مجموعه‌ی جذب‌کننده^{۲۸} (I) نامیده می‌شود اگر مجموعه‌ی باز^{۲۹} $B_0 \subset B$ باشد و به ازای هر $x(0) \in B$ ، همه‌ی پاسخ‌های $x(t)$ در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), B_0) = 0 \quad (3)$$

تعریف جاذب: مجموعه‌ی بسته^{۳۰} B_0 ، جاذب^{۳۱} نامیده می‌شود اگر مینیمال^{۳۲} باشد، یعنی هیچ مجموعه‌ی جذب‌کننده‌ی کوچک‌تر زیرمجموعه‌ی B_0 نباشد. مجموعه‌ی شرایط اولیه‌ی B که (3) در آن صدق می‌کند، بستر جذب^{۳۳} نامیده می‌شود.

حال تعریف مجموعه‌ی topologically transitive را ارایه می‌دهیم که در تعریف آشوب بسیار مهم است.

تعریف topologically transitive: مجموعه‌ی بسته‌ی تغییرناپذیر A را نسبت به $(1a)$ ، topologically transitive می‌نامند اگر به ازای هر دو مجموعه‌ی باز $U, V \subset A$ ، شرایط اولیه‌ی از U ($x_0 \in U$) و زمان‌ای $(t \geq 0)$ وجود داشته باشد که $x(t, x_0) \in V$ باشد.

²⁶ Semi-Objective
²⁷ Semi-Subjective
²⁸ Attracting Set
²⁹ Open Set
³⁰ Closed Set
³¹ Attractor
³² Minimal
³³ Basin of Attraction

تعاریف و قضایای زیادی در این باره وجود دارد که برای مطالعه‌ی آنها می‌توان به [Fradkov98] مراجعه کرد. در این جا به آنها نمی‌پردازیم و تنها به ارایه‌ی چند تعریف از آشوب بسنده می‌کنیم. تعریف ارایه شده در [Fradkov98] بدین صورت است.

تعریف آشوب Fradkov: فرض کنیم D ، جاذب $topologically\ transitive$ برای سیستم دینامیکی (2) باشد. آن‌گاه D جاذب شگفت نامیده می‌شود اگر کران دار³⁴ باشد و همه‌ی پاسخ‌های آن معادله که از D آغاز می‌شوند، ناپایدار لیاپانوف باشد. سیستم مورد نظر آشوبی است اگر حداقل یک جاذب شگفت داشته باشد.

برای دینامیک زمان-گسسته، تعریف Devaney مقبول است [Devaney87]. فرض کنید که S فضای توپولوژیکی باشد و f^m ، m مین تکرار نگاشت $f : S \mapsto S$ باشد، یعنی: $f^m := f(f^{m-1})$ ، $m = 1, 2, \dots$ و همچنین $f^0 = I$. آن‌گاه خواهیم داشت:

تعریف نقطه تناوبی: نقطه‌ی $x^* \in S$ نقطه‌ی تناوبی با تناوب m (یا m -تناوبی) نامیده می‌شود، اگر $x^* = f^m(x^*)$ ولی $x^* \neq f^k(x^*)$ ، $1 \leq k < m$. اگر $m = 1$ باشد، آن‌گاه x^* نقطه‌ی ثابت³⁵ نامیده می‌شود.

تعریف آشوب از دیدگاه Devaney بدین صورت است:

تعریف آشوب Devaney: نگاشت $f : S \mapsto S$ آشوبی است اگر،

(1) نگاشت f به شرایط اولیه حساس باشد، به این معنا که به ازای هر $x \in S$ و هر همسایگی از x $(\forall \epsilon > 0; N(x, \epsilon))$ ، $d > 0$ ای وجود داشته باشد که $|f^m(x) - f^m(y)| > d$ به ازای یک $y \in N(x, \epsilon)$ و یک $m \geq 0$.

(2) نگاشت f ، $topologically\ transitive$ باشد.

(3) نقاط تناوبی نگاشت f ، متراکم³⁶ در S باشند.

تعریف مفید دیگر آشوب گسسته-زمان، تعریف Li و Yorke است [Li75]. تعریف آنها که اولین تعریف ریاضی برای آشوب بوده است و برای حالت یک-بعدی بیان شده و قضیه‌ای نیز برای بررسی‌ی آشوبی بودن به همراه داشت، بعدها توسط Marotto به حالت چند-بعدی تعمیم یافت [Marotto78].

قضیه Marotto: سیستم دینامیکی زمان-گسسته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$X_{k+1} = f(X_k), \in \mathbb{R}^n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

که f در آن مشتق‌پذیر است. اگر f دارای $snap-back\ repeller$ باشد، آن‌گاه سیستم مورد بررسی به مفهوم $Li-Yorke$ آشوبی است، به معنای این‌که:

³⁴ Bounded

³⁵ Fixed Point

³⁶ Dense

(۱) عدد مثبت‌ای مانند N وجود داشته دارد که به ازای هر $p \geq N$ ، نگاشت f نقطه‌ی تناوبی‌ای با تناوب p دارد.

(۲) مجموعه‌ی شمارش‌ناپذیر S ‌ای بدون هیچ نقطه‌ی تناوبی‌ای از f وجود دارد که

$$f(S) \subset S \quad (1-2)$$

(۲-۲) به ازای $X_S, Y_S \in S$ (و $X_S \neq Y_S$):

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X_S) - f^k(Y_S)\| > 0 \quad (5)$$

(۳-۲) به ازای هر $X_S \in S$ و هر نقطه‌ی Y_{per} تناوبی‌ی متعلق به f :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X_S) - f^k(Y_S)\| > 0 \quad (6)$$

(۳) زیرمجموعه‌ی شمارش‌ناپذیر S_0 از S وجود دارد که به ازای هر $X_{S_0}, Y_{S_0} \in S_0$:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X_{S_0}) - f^k(Y_{S_0})\| = 0 \quad (7)$$

و در همه‌ی روابط بالا، $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است.

حال مانده است مشخص شود که snap-back repeller چه چیزی است. تعریف ابتدایی خود Marotto بدین صورت بوده است:

تعریف نقطه‌ی ثابت منبسط شونده: فرض کنید f تابع مشتق‌پذیر در $B_r(Z)$ (توپ بسته‌ای در فضای \mathbb{R}^n به مرکز Z) باشد. نقطه‌ی $Z \in \mathbb{R}^n$ نقطه‌ی ثابت منبسط شونده f در $B_r(Z)$ است، اگر $f(Z) = Z$ و $Df(X)$ (ژاکوبین $f(X)$) دارای مقادیر ویژه‌ای با قدر مطلق بزرگ‌تر از ۱ در همه‌ی نقاط $B_r(Z)$ باشد.

تعریف snap-back repeller: فرض کنید که Z نقطه‌ی ثابت منبسط شونده‌ی f در $B_r(Z)$ به ازای یک $r > 0$ باشد. Z یک snap-back repeller برای f است اگر نقطه‌ی $X_0 \in B_r(Z)$ مخالف با Z ای وجود داشته باشد ($X_0 \neq Z$) که $f^M(X_0) = Z$ و $\det(Df^M(X_0)) \neq 0$ به ازای یک عدد مثبت M .

با این حال نشان داده شده است که قضیه‌ی Marotto مشکلاتی دارد و آن هم در تعریف نقطه‌ی ثابت منبسط شونده‌ی آن است که شرط بیان شده در بالا همیشه درست نیست. قضیه‌ی زیر، صورت بهتری از قضیه‌ی مذکور است [Li03].

قضیه Marotto-Li-Chen: سیستم (۲) را در نظر بگیرید که Z ، نقطه‌ی ثابت آن است. هم‌چنین فرض کنید که (۱) $f(X)$ در $B_r(Z)$ به ازای یک $r > 0$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

(۲) همه‌ی مقادیر ویژه‌ی $((Df(X))^T (Df(X)))$ بزرگ‌تر از ۱ باشند.

(۳) نقطه‌ی $X_0 \in B_{r'}(Z)$ ($X_0 \neq Z$) وجود داشته باشد که در آن

$$B_{r'}(Z) = \{X \mid \|X - Z\| \leq r' \leq r \text{ and all eigenvalues of } (Df(X)^T (Df(X))) \text{ are larger than } 1\} \quad (8)$$

به طوری که $f^M(X_0) = Z$ که در آن $f^i(X_0) \in B_{r'}(Z), i = 0, 1, 2, \dots, M$ و $\det(Df^M(X_0)) \neq 0$ به ازای یک عدد مثبت M .

کنترل آشوب

در قسمت قبل در مورد آشوب و تعاریف آن توضیح دادم. در این قسمت به معرفی‌ی روش‌های مختلف کنترل آشوب می‌پردازم. همان‌طور که گفته شد، سیستم‌های آشوبی دارای ویژگی‌های مختلفی هستند که یکی از مهم‌ترین‌شان حساسیت زیاد به شرایط اولیه است. تفاوت بسیار کوچکی در شرایط اولیه باعث تفاوت بسیار در وضعیت آن در لحظات بعد خواهد شد و نرخ افزایش آن تفاوت متناسب با Lyapunov exponent آن خواهد بود. درست به همین دلیل، در ابتدا تصور می‌شد که کنترل سیستم‌های آشوبی ممکن نباشد و آن‌ها دارای دینامیک کنترل‌ناپذیر و پیش‌بینی‌ناپذیری باشند. اما در مقاله‌ای از Ott, Grebogi و Yorke^{۳۸} - که از افراد شاخص آشوب و کنترل آن‌اند - در سال ۱۹۹۰ امکان چنان چیزی اثبات شد [Ott90]. می‌توان گفت ویژگی‌ی خاص و منحصر به فرد روش آن‌ها این بود که امکان کنترل سیستم آشوب‌ناک با استفاده از سیگنال کنترلی بسیار کوچکی^{۳۸} (از نظر اندازه) را به اثبات می‌رساند. این یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد سیستم‌های آشوبی است که در دینامیک‌های دیگر امکان‌پذیر نیست.

روش‌های مختلفی برای کنترل آشوب وجود دارد. در بعضی از این روش‌ها، از ویژگی‌های ذاتی سیستم آشوب‌ناک استفاده می‌شود و بعضی دیگر تنها به کارگیری روش‌های کلاسیک تئوری کنترل برای سیستم‌های آشوبی هستند. روش‌های دسته‌ی اول - که به زودی توضیح داده می‌شوند - معمولاً از سه ویژگی استفاده می‌کنند:

۱. حساسیت بسیار زیاد آشوب به اختلال^{۳۹}
۲. ergodicity دینامیک آشوبی
۳. بازگشتی بودن^{۴۰} سیستم‌های آشوبی

حساسیت آشوب به اختلاف کوچک باعث می‌شود که ما بتوانیم با تغییر کوچک در ورودی، تغییرات قابل توجه‌ای در حالت آینده‌ی سیستم داشته باشیم. پس با انتخاب مناسب ورودی می‌توان از دینامیک آشوب استفاده کرد و تغییرات بزرگی در رفتار کلی سیستم ایجاد کرد.

³⁸ به چنین روی کرد کنترلی، small control می‌گویند.

³⁹ Perturbation

⁴⁰ Recurrence

همان‌طور که از تعریف‌های مختلف سیستم‌های آشوبی (مانند تعریف Devaney) بر می‌آید، دینامیک آشوبی به همهی نقاط strange attractor خود سر می‌زند و می‌توان مطمئن بود که در صورت به اندازه‌ی کافی صبر کردن، حتماً به همسایگی‌ی نقطه‌ی مورد نظر می‌رسیم. با استفاده از این خاصیت می‌توان کنترلی طراحی کرد که تنها در نزدیکی هدف مورد نظر، فعال شود و در بقیه‌ی نقاط هیچ تأثیری بر دینامیک نداشته باشد. به اندازه‌ی دل‌خواه نزدیک شدن به نقطه‌ی مورد نظر (مثلاً اگر هدف پایدارسازی fixed point دینامیک آشوبی باشد) در سیستم‌های آشوبی به شرط آن که آن نقطه در محدوده‌ی جاذب شگفت آن باشد، تضمین شده است.

بازگشتی بودن دینامیک در سیستم‌های آشوبی خاصیت دیگری است که می‌توان از آن برای کنترل سیستم‌های آشوبی استفاده کرد. بازگشتی بودن این تضمین را به ما می‌دهد که در صورتی که نداشت پوانکاره⁴¹ از دینامیک تشکیل دهیم، بعد از طی شدن زمان T دوباره به نقطه‌ای در همسایگی‌ی نقطه‌ی پیشین می‌رسیم. از این خاصیت می‌توان برای طراحی کنترلی استفاده کرد.

روش‌های زیر جزو دسته‌ی اول حساب می‌شوند و در آن‌ها از خواص آشوب استفاده شده است:

- Linearization of Poincare Map (OGY method)
- Time-Delayed Feedback Control (TDFC or Pyragas method)
- Impulsive Control (Occasional Proportional Feedback (OPF))
- Conventional + Chaotic Controllers

در مورد هر کدام از این‌ها در بخش‌های بعد توضیح داده می‌شود.

در روش‌های دسته‌ی دوم، از همان ایده‌های کنترل کلاسیک – معمولاً ایده‌های متداول برای کنترل سیستم‌های غیرخطی – استفاده می‌شود. در این روش‌ها به دینامیک آشوب به چشم دینامیک‌ای غیرخطی نگاه می‌شود و استفاده‌ی خاص‌ای از ویژگی‌های آشوب نمی‌شود. این روش‌ها برخلاف قبل منجر به کنترل سیگنال کوچک نمی‌شود مگر این‌که از خاصیت ergodicity آشوب استفاده شود و کنترل تنها در نزدیکی هدف کنترلی مورد نظر اعمال شود. در آن صورت می‌توان آن‌ها را روش‌های ترکیبی نام‌گذاری کرد.

برای مطالعه‌ی بیش‌تر درباره‌ی روش‌های مختلف کنترل آشوب، می‌توانید به مقالات [Chen97]، [Fradkov01]، [Fradkov02]، [Boccaletti00]، [Andrevskii03a]، [Andrevskii04] و همچنین مجموعه مقالات [Chen00a] رجوع کنید. در ضمن کتاب [Fradkov98] نیز توصیف ریاضی و دقیقی از بعضی از روش‌های کنترل آشوب – به طور خاص روش‌های نزدیک به کنترل کلاسیک غیرخطی و تطبیقی – انجام داده است. بعضی از این روش‌ها در بخش‌های بعدی توضیح داده می‌شود.

روش OGY

همان‌طور که گفته شد، اولین روش کنترل سیستم‌های آشوبی، روش‌ای موسوم به OGY است [Ott90]. این روش از خواص سیستم‌های آشوبی، یعنی حساسیت، ergodicity و بازگشتی بودن برای طراحی کنترلی موثر آشوب بهره می‌برد. اساس کار آن بر خطی‌سازی حول نگاشت پوانکاره است. فرض کنیم دینامیک آشوبی زیر را داریم:

⁴¹ Poincare Map

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathcal{X}^n, u \in \mathcal{U}^m \quad (9)$$

حال سطح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S = \{x \mid s(x) = 0\} \quad (10)$$

ابتدا فرض کنید که سیستم کنترل شده نیست و $u = 0$ باشد. فرض کنید که در نقطه‌ی $x_1(t_1)$ مسیر فاز^{۴۲} دینامیک از آن سطح بگذرد. حال اولین تقاطع بعدی مسیر فاز با آن سطح در نقطه‌ی $x_1(t_2)$ ، نگاشت پوانکاره کنترل نشده را مشخص می‌کند. اگر اکنون اثر سیگنال کنترل ای u را نیز در نظر بگیریم، نگاشت $x \mapsto P(x, u)$ را خواهیم داشت که به نگاشت پوانکاره کنترل شده^{۴۳} مشهور است. ویژگی‌ی این نگاشت این است که نیازی به دانستن دینامیک سیستم ندارد و با بررسی‌ی داده‌های زمانی حاصل شده از دینامیک می‌توان آن را به دست آورد. با استفاده از این نگاشت، می‌توان دینامیک زمان-گسسته‌ی زیر را به دست آورد:

$$x(k+1) = P(x(k), u), \quad x(k) \in \mathcal{X}^{n-1}, u(k) \in \mathcal{U}^m \quad (11)$$

پیش از ادامه، ذکر چند نکته ضروری است. ابتدا مشاهده می‌شود که پس از تقاطع با یک سطح در فضای $n-1$ بعدی که دارای توپولوژی‌ی $n-1$ بعدی است، فضای حالت دینامیک گسسته نیز یک بعد کاهش می‌یابد. پس برای دینامیک اصلی‌ی ۳ بعدی (حداقل بعد لازم برای آشوبی بودن یک سیستم)، دینامیک معادل ۲ بعدی‌ی خواهیم داشت. نکته‌ی دیگر این است که با توجه به نوع (تناوبی یا آشوبی بودن) مسیر بازگشتی در دینامیک اصلی، نمود آن در سطح پوانکاره نیز متفاوت خواهد بود. اگر دینامیک ۱-تناوبی باشد (یعنی $x(t+T) = x(t)$)، نمود آن در سطح پوانکاره به صورت یک نقطه خواهد بود (چون بعد از یک دوره‌ی تناوب، دقیقاً به همان نقطه‌ی قبلی از فضای حالت می‌رسد و در روی سطح پوانکاره تنها یک نقطه را مشخص می‌کند). اگر دینامیک با حرکت نوسانی به طور مجانبی به نقطه‌ای هم‌گرا می‌شود، اثرش بر سطح پوانکاره نیز به نقطه‌ای هم‌گرا می‌شود. اما اگر دینامیک آشوبی باشد، نمود آن دیگر یک یا مجموعه‌ای از نقطه نیست و پیچیده‌تر خواهد بود.

روش کار اینک ساده است. فرض کنید می‌خواهیم یکی از UPOهای ناپایدار سیستم آشوبی را پایدار سازیم. نتیجه، ایجاد چرخه حدی^{۴۴} (یا مدار^{۴۵}) پایداری خواهد بود. همان‌طور که گفته شد، چنین چرخه حدی‌ی پایداری، متناظرست با نقطه‌ای در صفحه پوانکاره. فرض کنید که چنان نقطه‌ای با x^* مشخص شده باشد. از آن‌جا که چرخه‌ی حدی اولیه ناپایدار بوده است، نقطه‌ی متناظر با آن در صفحه‌ی پوانکاره نیز ناپایدار خواهد بود. اگر بتوان **fixed point** نگاشت پوانکاره را (که توصیف کننده‌ی دینامیک زمان گسسته است) پایدار کرد، پس چرخه حدی نیز پایدار شده است. برای انجام چنین عملی، ابتدا حول نقطه‌ی مورد نظر خطی‌سازی ژاکوبی انجام می‌دهیم. یعنی^{۴۶}:

⁴² Phase Trajectory

⁴³ Controller Poincare Map

⁴⁴ Limit Cycle

⁴⁵ Orbit

⁴⁶ فرض شده است که نقطه‌ی مورد نظر، نقطه ثابت ناپایدارست و در نتیجه $u = 0$ گرفته شده است و گر نه اگر نقطه‌ای غیر از نقطه‌ی ثابت

طبیعی‌ی سیستم مورد نظر بود آن‌گاه می‌بایست $u = u^*$ متناسب انتخاب شود.

$$A = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=x^*, u=0} \quad (12)$$

$$B = \left. \frac{\partial P}{\partial u} \right|_{x=x^*, u=0} \quad (13)$$

و اگر بنویسیم

$$\tilde{x} = x - x^* \quad (14)$$

خواهیم داشت

$$\tilde{x}(k+1) \cong A\tilde{x}(k) + Bu(k) \quad (15)$$

که تقریب در صورتی که $\tilde{x} \rightarrow 0$ دقیق می‌شود. حال اگر بتوان کنترل

$$u(k) = K\tilde{x}(k) \quad (16)$$

را طراحی کرد که سیستم حلقه بسته

$$\tilde{x}(k+1) = (A - BK)\tilde{x}(k) \quad (17)$$

پایدار باشد، آن‌گاه هدف کنترلی ما که پایدارسازی UPO بوده است، انجام می‌شود. پیش از آن که به چگونگی طراحی K مطلوب پردازم، لازم است ذکر کنم که تا بدین‌جا از خاصیت بازگشتی بودن آشوب استفاده شده است. اما ویژگی ergodicity آن هنوز به طور مشخص به کار نرفته است. این ویژگی باعث می‌شود تا بتوانیم از کنترل سیگنال کوچک استفاده کنیم. برای انجام چنین کاری، کنترل را عملاً بدین صورت اعمال می‌کنیم:

$$u(k) = \begin{cases} K\tilde{x}(k) & \text{if } |\tilde{x}(k)| < d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

با کوچک گرفتن d می‌توان مطمئن بود که اندازه‌ی سیگنال کنترلی بیش از حد مشخصی بزرگ نمی‌شود.^{۴۷} در روش OGY، فضا به دو manifold پایدار و ناپایدار تقسیم می‌شود و سیگنال کنترل به گونه‌ای انتخاب می‌شود که حالت سیستم بر روی manifold پایدار قرار گیرد و هر گونه حرکتی در راستای manifold ناپایدار حذف می‌شود. با قرار گرفتن حالت سیستم بر روی manifold پایدار، مسیر حالت سیستم به صورت نمایی به نقطه ثابت میل می‌کند.

⁴⁷ اندازه‌ی آن کوچک‌تر از $\bar{s}(K)d$ خواهد بود که در آن $\bar{s}(K)$ بزرگ‌ترین singular value ماتریس K خواهد بود.

فرض کنید سیستم زمان گسسته دو-بعدی‌ای را در نظر بگیرید که دارای یک مقدار ویژه پایدار (I_s) و یک مقدار ویژه ناپایدار (I_u) است.⁴⁸ یعنی:

$$|I_s| < 1 < |I_u| \quad (19)$$

اکنون دو بردار ویژه چپ و راست هر کدام از این مقادیر ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Av_s = I_s v_s, w_s^T A = I_s w_s^T \quad (20)$$

$$Av_u = I_u v_u, w_u^T A = I_u w_u^T \quad (21)$$

اگر بخواهیم حرکت دینامیک در جهت ناپایدار صفر باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$w_u^T \tilde{x}(k+1) = 0 \Rightarrow w_u^T A \tilde{x}(k) + w_u^T B u = 0 \Rightarrow w_u^T I_u \tilde{x}(k) + w_u^T B u = 0 \quad (22)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$u = -I_u \frac{w_u^T \tilde{x}(k)}{w_u^T B} \quad (23)$$

چند نکته در مورد به کارگیری روش OGY قابل ذکر است. یکی این که برای به دست آوردن نگاهت پوانکاره می‌توان از روش‌های شناسایی استفاده کرد و مدل‌ای برای داده‌های ورودی-خروجی تخمین زد. مشکل دیگر، در اختیار نداشتن کل حالت سیستم است. برای حل چنین مشکل‌ای می‌توان از بردار مختصات تاخیردار⁴⁹ استفاده کرد. فرض کنید که خروجی قابل اندازه‌گیری سیستم $y = h(x)$ باشد. آن‌گاه می‌توان بردار زیر را تعریف کرد:

$$X(t) = [y(t) \quad y(t-T) \quad \dots \quad y(t-(m-1)T)]^T \quad (24)$$

و آن‌گاه کنترل را به صورت زیر اعمال کرد:

$$u(k) = \begin{cases} U(X(t)) & \text{if } |y(t-iT) - y^*| < d, i=1, \dots, m-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

نشان داده می‌شود که اگر $m \geq 2n$ (که n بعد فضای حالت سیستم اصلی است)، آن‌گاه بردار X بازنمایی‌ای یک-به-یک از حالت سیستم است [Takens80].

⁴⁸ اگر هر دو مقدار ویژه پایدار باشند، می‌توان نتیجه گرفت که چرخه حدی پایدار است.

⁴⁹ Delay Coordinate Vector

در به کارگیری روش OGY - به صورتی که ارایه شد - می‌بایست manifold های پایدار و ناپایدار مشخص باشند. چنین کاری در سیستم‌های با ابعاد بالا و آن‌هایی که ژاکوبین‌شان دارای مقادیر ویژه مزدوج مختلط هستند ساده نیست. در [Yu00a] و [Yu01] ایده OGY تعمیم یافته است و invariant manifold های معرفی شده‌اند که وابسته به بردارهای ویژه سیستم اصلی نیستند.

روش TDFC

یکی از روش‌های متداول کنترل سیستم‌های آشوبی، استفاده از فیدبک تاخیردار است. برخلاف اغلب کاربردهای کنترلی که در آن‌ها وجود تاخیر نامطلوب است و تحلیل را بسیار پیچیده می‌کند، در این روش وجود تاخیر باعث به وجود آمدن روش‌ای ساده و موثر برای کنترل UPO سیستم‌های آشوبی می‌شود. ایده اولیه‌ی به کارگیری تاخیر برای کنترل آشوب توسط Pyragas در سال ۱۹۹۲ مطرح شد [Pyragas92].
دینامیک زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (26)$$

اگر $\bar{x}(t)$ پاسخ‌ای ناپایدار با دوره تناوب T معادله پیش باشد، آن‌گاه داریم:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}) \quad (27)$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t - T) \quad (28)$$

هدف کنترلی، طراحی کنترلی کننده‌ی ساده‌ایست که این UPO را پایدار کند. اگر سیستم حلقه-بسته را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\dot{x} = f(x) + K(x(t) - x(t - T)) \quad (29)$$

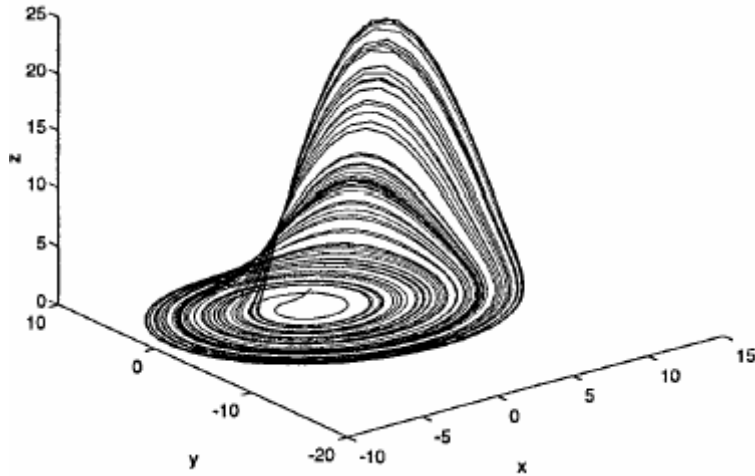
هنگامی که مسیر سیستم به چرخه حدی با دوره تناوب T میل می‌کند، جمله‌ی فیدبک صفر می‌شود. پس مشخص است که مسیر پایدار شده، پاسخ سیستم اصلی نیز هست. ثابت می‌شود که اگر سیستم حلقه-بسته $\bar{x}(t)$ را - که UPO ذاتی دینامیک است - دنبال کند و ماتریس K نیز ناپایدار باشد، آن‌گاه زمان تاخیر سیگنال کنترلی مضربی صحیح از دوره تناوب $\bar{x}(t)$ است [Yu00b].

پیش از ادامه، توضیح مختصری درباره‌ی ایده‌ی کلی کار می‌دهم. با اضافه کرده جمله‌ی کنترلی‌ای به شکل

$$u(t) = K(x(t) - x(t - T)) \quad (30)$$

اگر سیستم از مسیر متناوب مورد نظر خود دور شود، چون بین $x(t)$ و $x(t - T)$ تفاوت به وجود می‌آید سیگنال خطایی دریافت می‌کند (به شرط متناوب بودن توجه کنید). اما هنگامی که مسیر سیستم به حالت متناوب مورد نظر نزدیک می‌شود، این جمله صفر می‌شود.

برای اعمال TDFC، لازم است مقدار T مشخص باشد. چنین کاری یا مستلزم حل دینامیک سیستم و به دست آوردن معادله UPO مورد نظر است (که در حالت کلی کاری بسیار پیچیده است) و یا توسط روش‌های سعی و خطا انجام



شکل 6. دینامیک آشوبی Rössler

می‌شود. البته روش‌های عددی‌ای نیز برای این کار وجود دارند که به عنوان مثال می‌توانید به [Chen99a] و [Yu00b] مراجعه کنید.

علاوه بر حالت ساده‌ی ارائه شده، فرم سیگنال کنترلی را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$u(t) = K \left(x(t) - R_M \sum_{i=1}^M r_{m-1} x(t - mT) \right) \quad (31)$$

که در آن

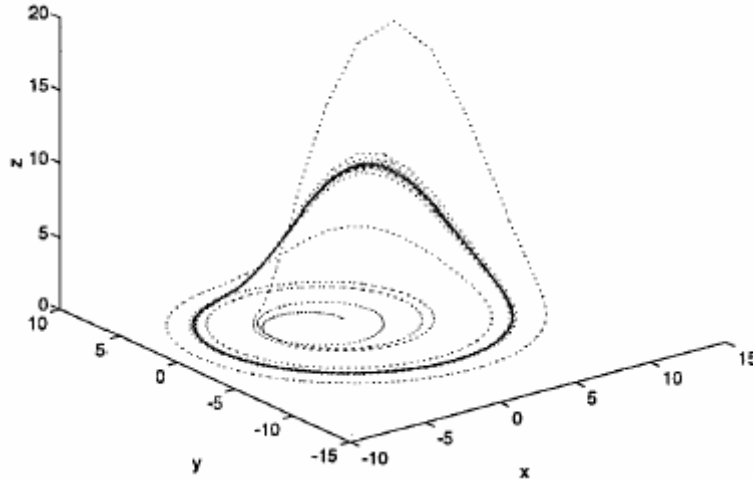
$$R_M = \frac{1}{\sum_{i=1}^M r_{m-1} x(t - mT)} \quad (32)$$

تحلیل این گونه سیستم‌ها پیچیده‌اند و با وجود این که در عمل بسیار به کار می‌رفته‌اند، اما تا چند سال پیش، تحلیل دقیقی از پایداری آن وجود نداشت. با این وجود در این اواخر تحلیل‌هایی از این سیستم‌ها شده است. یکی از چنان نتایجی در زیر می‌آید:

اگر دینامیک خطای بین UPO ذاتی و دینامیک تحت کنترل را بنویسیم، داریم:

$$\dot{e} = f(x, \bar{x}) + K(x(t) - x(t - T)) \quad (33)$$

که در آن $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ و $f(x, \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x})$. اگر ژاکوبین در مسیر UPO را به صورت $J = \partial f(x, \bar{x}) / \partial x$ بنویسیم، آن‌گاه قضیه زیر را خواهیم داشت [Chen99a] و [Yu00b].



شکل 7. کنترل TD سیستم Rössler منجر شده به پایداری UPO ۱-تناوبی

قضیه: برای دینامیک خطای بالا، اگر دو ماتریس ثابت متقارن مثبت-معین P و Q ، و ماتریس بهره‌ی ثابت K وجود داشته باشند که معادله ریکاتی^{۵۰} زیر

$$J^T(x)P + PJ(x) + PKQ^{-1}K^T P + PK + K^T P + Q \quad (34)$$

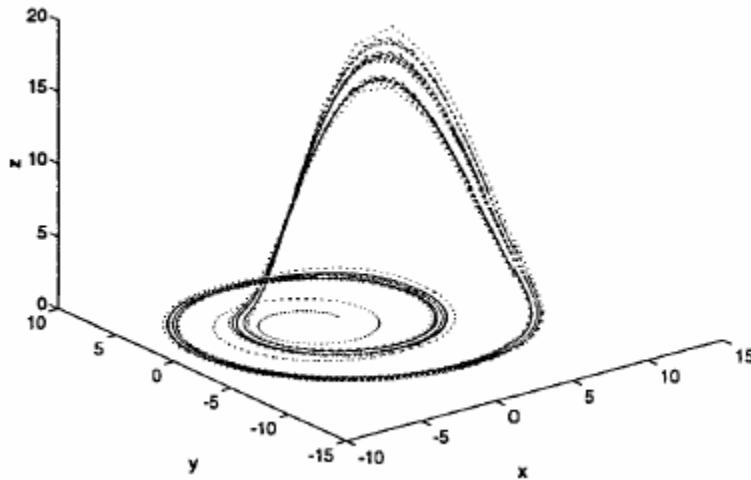
یا صفر باشد یا (نیمه-)منفی-معین باشد، آن‌گاه $\|e(t)\|$ به اندازه‌ی کافی کوچک خواهد بود و در زمان بی‌نهایت به صفر میل می‌کند.

به عنوان مثالی از چگونگی کارکرد این روش، تاثیر این روش بر سیستم Rössler آورده می‌شود. دینامیک سیستم Rössler کنترل شده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ z & 0 & -5.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y(t) - y(t-T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

که k_c ثابتی است که باید مشخص شود. اگر سیستم کنترل نشده باشد (یعنی $k_c = 0$)، رفتار سیستم به صورت مشخص شده در شکل (۶) است (شکل‌های این بخش از [Chen99a] برداشت شده‌اند). پس از انتخاب $k_c = 0.4$ که شروط مساله را برآورد می‌کند و استفاده از روش تطبیقی برای پیدا کردن T ، نتایج زیر حاصل می‌شود. روش پیدا کردن دوره تناوب در آخر این بخش توضیح داده می‌شود، و حال کافی‌ست بدانیم که به ازای مقادیر اولیه مختلف، دوره تناوب‌های متفاوتی پیدا می‌کند که همه دارای کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مشترکی هستند. نتیجه را به ازای کوچک‌ترین دوره تناوب ($T = 5.8609$) در شکل (۷) و به ازای دومین دوره تناوب ($T = 11.7117$) در شکل (۸) می‌بینید.

⁵⁰ Riccati



شکل 8. کنترل TD سیستم Rössler منجر شده به پایداری UPO ۲-تناوبی

نتایجی درباره‌ی تحلیل پایداری سیستم‌های ناخودگردان^{۵۱} و ماتریس بهره‌ی ویژه، تحلیل‌های پیشین اعتباری ندارد. یکی از کارهایی که برای حل این حالت در نظر گرفته شده، استفاده از آنالیز Melnikov است که در [Cai02] برای حالت ساده‌ای انجام شده.

روش‌های کنترل ضربه‌ای^{۵۲} و کنترل OPF

یکی از روش‌های متداول و ساده‌ی کنترل سیستم‌های آشوب، روش OPF است. اساس این روش بسیار شبیه به ایده‌ی OGY است و حتی می‌توان تفسیری OGY-گونه از آن داشت. فرض کنید UPO ای داشته باشیم که دامنه‌ای متفاوت از دامنه‌ی مورد نظر داشته باشد. اگر خروجی‌ای اسکالر از دینامیک داشته باشیم $(y(t) = h(x(t)))$ و بخواهیم این خروجی در دامنه‌ی ثابت y^* پایدار شود، آن‌گاه می‌توان خطای بین مقدار اندازه‌گیری شده در نقطه‌ای خاص با مقدار دامنه‌ی مورد نظر را به عنوان ورودی کنترلی به سیستم اعمال کرد. مثلاً این نقطه می‌تواند جایی باشد که مینیمم یا ماکزیمم $y(t)$ رخ می‌دهد. اگر این نقاط را با y_k نشان دهیم، آن‌گاه کنترل OPF بدین صورت خواهد بود [Hunt91]:

$$u_k = \begin{cases} K(y_k - y^*) & \text{if } |y_k - y^*| < d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

چنین سیستمی را می‌توان به صورت یک OGY با نداشت پوانکاره‌ی یک-بعدی‌ای دانست که معادله مقطع پوانکاره‌ی آن بدین صورت است:

⁵¹ non-autonomous

⁵² Impulsive Control

$$s(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, 0) = \dot{y}(t) = 0 \quad (37)$$

در این روش هرگاه مقدار خروجی مورد در زمانی که به حداکثر (یا حداقل) اندازه‌ی خود رسیده است - یعنی در هنگامی که در ماکزیمم (یا مینیمم) تناوب است- با مقدار مورد نظر تفاوت داشت، سیگنال کنترلی‌ای متناسب با آن خطا اعمال می‌شود.

درست همان‌طور که OPF را می‌توان به عنوان حالت خاص و یک بعدی‌ی روش OGY دانست، می‌توان آن را به عنوان روش‌ای از روش‌های کنترل ضربه‌ای نیز در نظر گرفت. کنترل ضربه‌ای، کنترلی‌ایست که اعمال سیگنال کنترلی به صورت ضربه‌هایست که تنها در زمان‌های گسسته‌ای صورت می‌گیرد و می‌تواند حالت دینامیک را ناگهان تغییر دهد. تئوری ریاضی‌ی این روش‌ها، معادلات دیفرانسیل ضربه‌ایست⁵³ که توسط Bainov, Lakshmikantham و Simeonov معرفی شده است [Lakshmikantham89]. پس از آن سال ۱۹۹۷ ایده‌های کنترل ضربه‌ای بر پایه‌ی تئوری معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای معرفی شد [Yang97]. قضایای معرفی شده پایداری‌ی کلی سیستم مورد بررسی را با توجه به زمان بین ضربه‌ها، اندازه‌ی ضربه‌ها و ... به دست می‌آورند. ایده‌ی اصلی‌ی قضایای این روش، مقایسه‌ی سیستم اصلی با سیستم دیگری به نام سیستم مقایسه⁵⁴ که کران‌ای از رفتار سیستم مشخص می‌کند و در صورت اثبات پایداری سیستم مقایسه، پایداری سیستم اصلی نیز اثبات می‌شود. در این‌جا خلاصه‌ای از قضایای معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای و قضایای پایداری‌ی سیستم‌های کنترل شده را می‌آورم ([Suykens00], [Yang04]).

سیستم دینامیکی‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (38)$$

که $f : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$ پیوسته است. مجموعه‌ی گسسته‌ی $\{t_k\}$ که در آن

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} \quad (39)$$

در نظر بگیرید. حال می‌توان بردار پرش در آن زمان‌ها را به صورت زیر تعریف کرد:

$$U(k, x) = \Delta x|_{t=t_k} = x(t_k^+) - x(t_k^-) \quad (40)$$

اینک سیستم ضربه‌ای این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k \\ \Delta x = U(k, x), & t = \tau_k \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots \quad (41)$$

⁵³ Impulsive Differential Equation

⁵⁴ Comparison System

برای بررسی پایدارى این سیستم دیفرانسیل ضربه‌ای، تعاریف زیر را لازم داریم:

تعریف: $V : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}_+$ را متعلق به کلاس n_0 می‌نامیم اگر:
 V در محدوده‌ی $(t_{k-1}, t_k] \times \mathfrak{R}^n$ به ازای همه‌ی $x \in \mathfrak{R}^n$ پیوسته باشد و حد زیر وجود داشته باشد

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x) \quad (42)$$

۲. V به طور محلی در x لپشیتزی^{۵۵} باشد.

تعریف: برای $(t, x) \in (t_{k-1}, t_k] \times \mathfrak{R}^n$ تعریف می‌کنیم:

$$D^+V(t, x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)] \quad (43)$$

تعریف سیستم مقایسه: اگر $V \in n_0$ باشد و فرض کنیم که

$$\begin{cases} D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x)), & t \neq t_k \\ V(t, x+U(k, x)) \leq y_k(V(t, k)), & t = t_k \end{cases} \quad (44)$$

که در آن $g : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ پیوسته باشد و $y_k : \mathfrak{R}_+ \mapsto \mathfrak{R}_+$ غیر کاهشی باشد، آن‌گاه سیستم دینامیکی زیر

$$\begin{cases} \dot{w} = g(t, w), & t \neq \tau_k \\ w(t_k^+) = y_k(w(t_k)), & t = \tau_k \\ w(t_0^+) = w_0 \geq 0, & t_0 \geq 0 \end{cases} \quad i=1,2,\dots \quad (45)$$

سیستم مقایسه‌ی سیستم اصلی نامیده می‌شود.

توجه کنید که سیستم مقایسه، تک-بعدی است.

تعریف توپ: توپ^{۵۶} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_r = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x\|_2 < r\} \quad (46)$$

تعریف تابع کلاس K : تابع a متعلق به کلاس K است اگر a پیوسته و اکیدا صعودی باشد و هم‌چنین $a(0) = 0$ شود.

⁵⁵ Lipschitzian

⁵⁶ Ball

اینک قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم. این قضیه بین پایداری سیستم اصلی و سیستم مقایسه تک-بعدی ارتباط برقرار می‌کند.

قضیه (قضیه 3.2.1 از [Lakshmikantham89]): فرض کنید که سه شرط زیر برقرار باشد:

$$1. V : \mathfrak{R}_+ \times S_r \mapsto \mathfrak{R}_+, \quad r > 0, \quad V \in n_0, \quad D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x)), \quad t \neq t_k \quad (47)$$

۲. $r_0 > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای $x \in S_{r_0}$ و به ازای هر k ای داشته باشیم:

$$a) \quad x + U(k, x) \in S_{r_0} \quad (48)$$

$$b) \quad V(t, x + U(k, x)) \leq y_k(V(t, x)), \quad t = t_k, \quad x \in S_{r_0} \quad (49)$$

۳. شرط زیر برای $V(t, x)$ در $\mathfrak{R}_+ \times S_r$ برقرار باشد:

$$b(\|x\|_2) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|_2) \quad (50)$$

که در آن a و b متعلق به کلاس K اند.

در این صورت ویژگی‌ی پایداری سیستم مقایسه، ویژگی‌ی پایداری سیستم اصلی را نتیجه می‌دهد.

قضیه‌ی زیر در مورد پایداری سیستم مقایسه (و در نتیجه سیستم اصلی) نظر می‌دهد (برای دیدن فرم کلی‌تری از قضیه‌ی زیر به [Li01] مراجعه کنید).

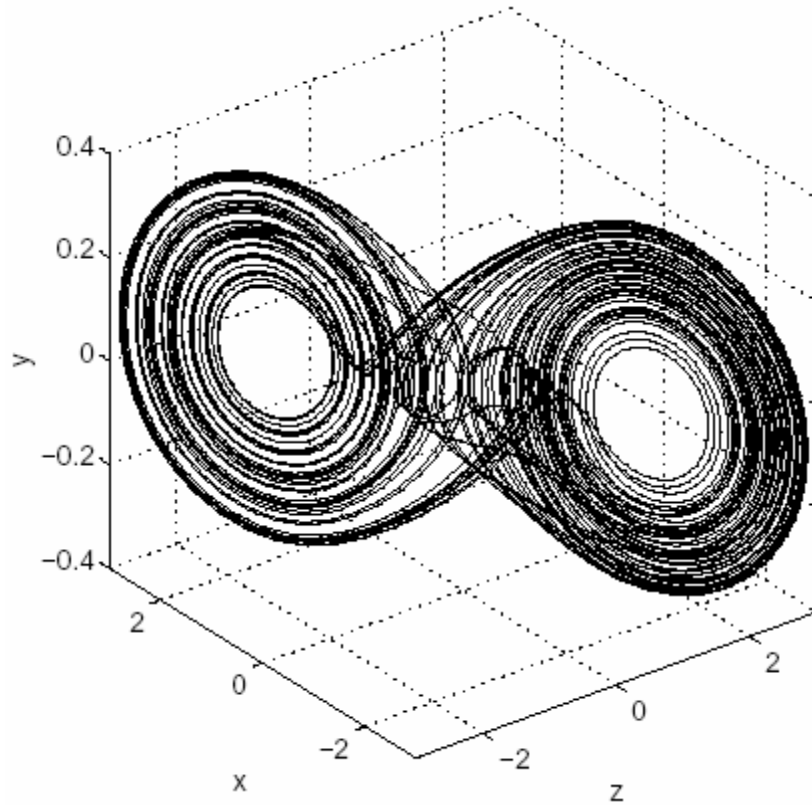
قضیه: اگر $g(t, w) = \dot{I}(t)w$ و $I \in C^1[\mathfrak{R}_+, \mathfrak{R}_+]$ باشد و $y_k(w) = d_k w$ که در آن به ازای همه‌ی k ، باشد، آن‌گاه سیستم اصلی پایدار نمایی است اگر

$$I(t_{k+1}) + \log(gd_k) \leq I(t_k), \quad \forall k, \quad g > 1 \quad (51)$$

$$\dot{I}(t) \geq 0 \quad (52)$$

به عنوان نمونه، پایداری‌سازی نوسان‌ساز Chua با استفاده از تئوری کنترل ضربه‌ای را بررسی می‌کنیم. دینامیک نوسان‌ساز Chua به صورت زیرست:

⁵⁷ اگر تابعی متعلق به C^k باشد، خودش و k مشتق آن پیوسته خواهد بود.



شکل 9. نوسان ساز Chua

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0[y - x - f(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -b_0y - g_0z \end{cases} \quad (53)$$

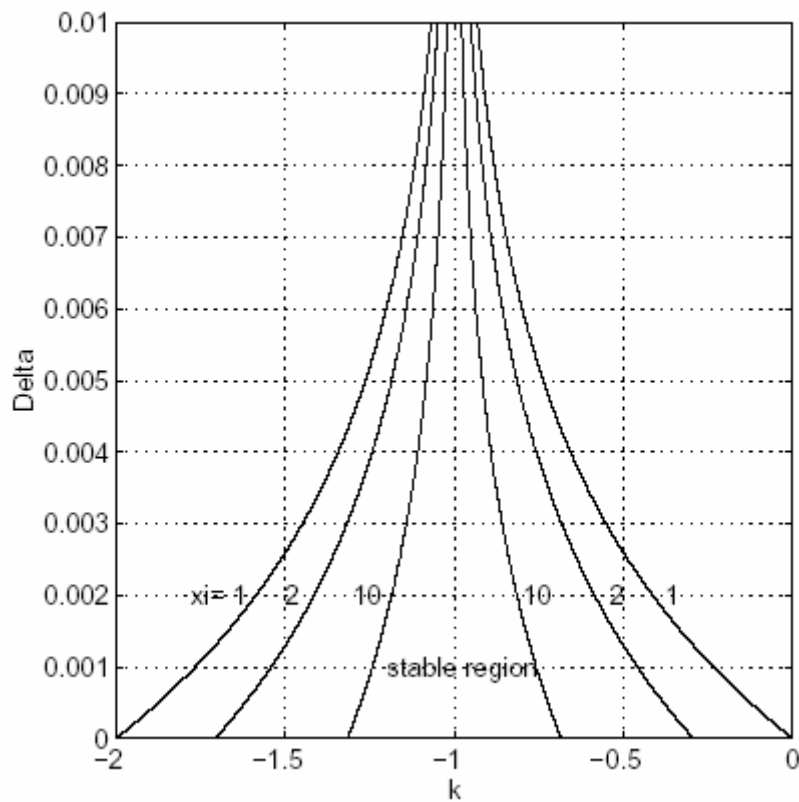
که در آن مشخصه تکه‌ای-خطی دیود Chua است:

$$f(x) = b_0x + \frac{1}{2}(a_0 - b_0)(|x+1| - |x-1|) \quad (54)$$

که در آن $a_0 < b_0 < 0$ ثابت هستند. نمونه‌ای از رفتار این نوسان ساز را به ازای $a = 15$ ، $b = 20$ ، $g = 0.5$ می‌بینید. در شکل (۹) $a = -\frac{120}{7}$ و $b = -\frac{75}{7}$ می‌بینید.

اگر $X = [x \ y \ z]^T$ بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\dot{X} = AX + \Phi(X) \quad (55)$$



شکل 10. تاثیر k بر زمان بین پالس‌های پایدارکننده

$$A = \begin{bmatrix} -a_0 & a_0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b_0 & -g_0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} -a_0 f(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

و در نتیجه معادلات سیستم کنترل شده با کنترل ضربه‌ای به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + \Phi(X), & t = t_k \\ \Delta X|_{t=t_k} = BX \end{cases} \quad (58)$$

با استفاده از قضایای به دست آمده در قسمت پیش، نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت:

نتیجه: فرض کنید که d_1 بزرگ‌ترین مقدار ویژه $(I + B^T)(I + B)$ باشد که در آن B ماتریس متقارنی است، و $r_R(I + B) \leq 1$ باشد که در آن شعاع طیفی را مشخص می‌کند و همچنین q بزرگ‌ترین مقدار ویژه $(A + A^T)$ و پالس‌ها را هم‌فاصله با فاصله‌ی زمانی Δ_t انتخاب کرده باشیم. اگر شرط زیر برقرار باشد

$$0 \leq q + 2|a_0 a_0| \leq -\frac{1}{\Delta_t} \log(zd_1), z > 1 \quad (59)$$

آن‌گاه مبدا کنترل ضربه‌ای شده‌ی نوسان‌ساز *Chua*، پایدار مجانبی کلی^{۵۸} است.

تخمینی برای حد بالای زمان بین پالس‌ها از شرط نتیجه‌ی حاصل به دست می‌آید:

$$\Delta_{t, \max} = \left| \frac{\log(zd_1)}{q + 2|a_0 a_0|} \right|, z \rightarrow 1^+ \quad (60)$$

با توجه به این که B چگونگی انتخاب شده باشد، ناحیه‌ی پایدار ممکن برای Δ_t ‌ها تغییر می‌کند. اگر B را به صورت

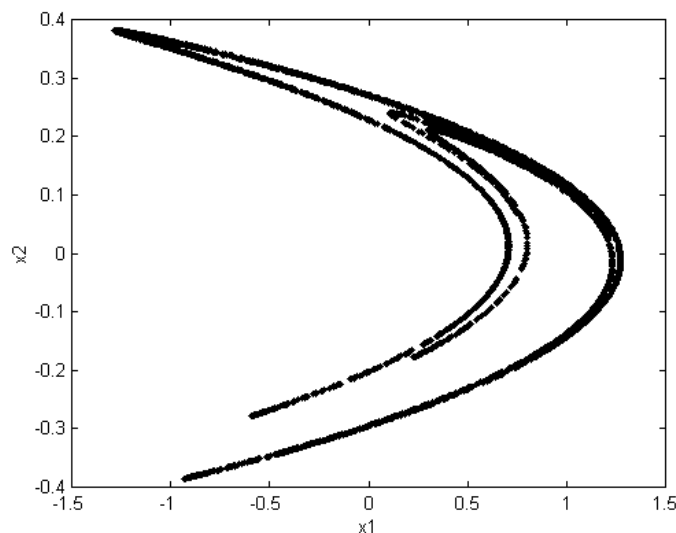
$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

انتخاب کنیم، از آن‌جا که $r_R(I + B) \leq 1$ است، نتیجه می‌شود که $-2 \leq k \leq 0$. در این حالت، d_1 نیز برابر $d_1 = (k + 1)^2$ می‌شود. در شکل (۱۰)، تاثیر مقدار k را بر محدوده‌ی قابل قبول Δ_t برای پایداری سیستم حلقه-بسته می‌بینید. توجه کنید که تخمین دقیق وقتی‌ست که $z \rightarrow 1^+$. پس فاصله‌های زمانی‌ای پایدارند که زیر منحنی‌ی مربوط به $z \rightarrow 1^+$ باشند. در ضمن دقت کنید که نتایج حاصل، شرط کافی‌ست و نه لازم- در نتیجه سیستمی ممکن است با وجود رعایت نکردن شرط داده شده، پایدار باقی بماند.

برای مشاهده‌ی قضایای بیش‌تر و همچنین کاربرد آن در هم‌زمانی به [Suykens00] و [Yang04] مراجعه کنید. در [Guan00] از تئوری کنترل ضربه‌ای برای پایداری‌سازی سیستمی که توسط سیگنال تناوبی خارجی‌ای تحریک می‌شود استفاده شده است و قضایای دقیقی به عنوان شرط پایداری مطرح شده است.

روش‌های کنترل کلاسیک و ترکیبی

⁵⁸ Globally Asymptotically Stable

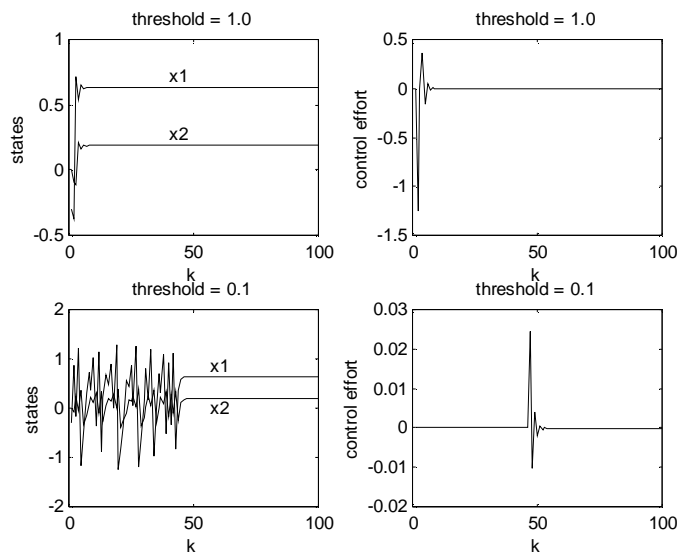


شکل 11. نگاشت Henon کنترل نشده

بسیاری از روش‌های متداول کنترل غیرخطی نیز برای کنترل آشوب استفاده شده است. در واقع، در این روش‌ها بدون در نظر گرفتن ویژگی‌های خاص سیستم آشوبی، طراحی به مانند یک سیستم با دینامیک غیرخطی صورت می‌گیرد. ویژگی بارز این روش‌ها این است که در صورتی که برای حالت کلی‌شان اثبات پایداری و ... وجود داشته باشد، برای حالت خاص آشوبی نیز چنان اثباتی برقرار خواهد بود و از آنجا که تئوری کلاسیک کنترل، تاکنون پیش‌رفت قابل ملاحظه‌ای کرده است، معمولاً چنان طراحی‌هایی چنین ویژگی‌هایی را خواهند داشت. اما از طرف دیگر چون ویژگی‌های آشوب در نظر گرفته نشده است، نتیجه بازده موثر و خوب طراحی‌های ویژه‌ی آشوب مانند روش OGY یا TDFC را نخواهند داشت. به طور مشخص ویژگی‌ی کنترل سیگنال کوچک معمولاً برای آن‌ها برقرار نیست. به عنوان نمونه‌ای از این روش‌ها می‌توان به طراحی با استفاده از روش backstepping اشاره کرد که آشوب حذف شده و سیستم دارای نقطه‌ی تعادل پایدار شده است ([Harb02a] و [Harb02b]).

ایده‌ای که برای ترکیب روش‌های کلاسیک و ویژگی‌های دینامیک آشوبی استفاده می‌شود، استفاده از خاصیت ergodicity آشوب است. بدین صورت که سیگنال کنترل اعمال نمی‌شود، مگر این که حالت سیستم به همسایگی‌ی به اندازه کافی کوچک‌اش نزدیک شده باشد. اگر نقطه‌ی مورد نظر جزو جاذب شگفت دینامیک باشد، مطمئن هستیم که در زمان محدود به اندازه‌ی کافی به آن نقطه نزدیک خواهیم شد. این ایده با استفاده از طراحی‌ی بهینه خطی محلی LQR برای پاندول معکوس آشوبی شده با استفاده از سیگنال تحریک خارجی در [Vincent00] به کار رفته است. هم‌چنین چنین ایده‌ای برای کنترل آشوب دینامیک‌های گسسته-زمان نیز به کار رفته است [Farahmand03b]. بدین صورت که خطی‌سازی‌ای حول نقطه‌ی ثابت ناپایدار دینامیک آشوبی صورت گرفته است و با استفاده از آن طراحی‌ی کنترلر LQR انجام گرفته است. اعمال سیگنال کنترلی بدین صورت انتخاب شده است:

$$u(k) = \begin{cases} -Kx(k) & \|x(k) - x^*\| < q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (62)$$

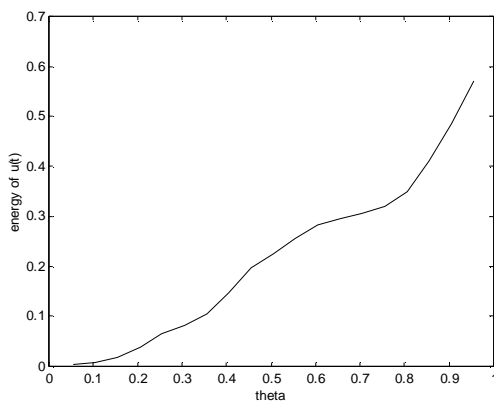


شکل 13. نمونه‌ای از پاسخ سیستم کنترل شده به ازای دو مقدار مختلف پارامتر q

که q پارامتری قابل تنظیم است و همسایگی فعالیت کنترلر را مشخص می‌کند و K نیز بهره‌ی حالت به دست آمده از روش LQR یا هر روش دیگری است. این ایده برای نگاشت Henon زیر - که در شکل (۱۱) مسیر حالت آن را مشاهده می‌کنید - پیاده‌سازی شده است:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -1.4x_1^2 + x_2 + 1 + u \\ x_2(k+1) &= 0.3x_1 \end{aligned} \quad (63)$$

در شکل (۱۲) پایداری به ازای دو مقدار مختلف q نمایش داده شده است. دیده می‌شود که هرچه مقدار q بزرگ‌تر باشد، پایداری سریع‌ترست و هرچه کوچک‌تر باشد، پایداری کندترست. دلیل این موضوع، زمان لازم برای رسیدن به همسایگی نقطه‌ی تعادل مورد نظرست. مقایسه‌ای بین انرژی لازم برای کنترل به ازای ابعاد مختلف همسایگی - که با q مشخص می‌شود - در شکل (۱۳) مشاهده می‌کنید.



شکل 12. تاثیر q بر انرژی لازم برای کنترل - مشاهده می‌شود که هر چقدر q بزرگ‌تر می‌شود، این انرژی نیز افزایش می‌یابد.

در نهایت روش کلاسیک دیگری که برای کنترل آشوب به کار رفته است، استفاده از کنترل کننده‌ی PI حالت است [Jiang02]. در این روش مدل سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + g(x) + u \\ y &= Cx \\ x &\in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^1 \end{aligned} \quad (64)$$

و $g(x)$ هم به طور پیوسته مشتق پذیر در نظر گرفته می‌شود. ثابت می‌شود برای کنترل

$$u = I \left[B(Kx + k \int_0^t (y - y_s) dt) \right] \quad (65)$$

که در آن

$$I = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_{x_s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (66)$$

و Ω_{x_s} همسایگی کوچکی اطراف نقطه‌ی تعادل مورد نظر است، اگر جملات حد جملات مرتبه‌ی دو به بالای $g(x)$ در نزدیکی نقطه‌ی تعادل مورد نظر (که با $\bar{g}(e)$ نشان‌اش می‌دهیم) به صفر میل کند و خودش نیز صفر باشد، یعنی:

$$\bar{g}(0) = 0 \quad (67)$$

$$\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{g}(e)\|}{\|e\|} = 0 \quad (68)$$

آن‌گاه سیستم را می‌توان توسط طراحی‌ای که $(\bar{A} + \bar{B}\bar{K})$ پایدار کند، کنترل کرد. در این رابطه \bar{A} ، \bar{B} و \bar{K} بدین صورت تعریف شده‌اند:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{K} = [K \quad k] \quad (69)$$

مشاهده می‌شود که در این روش نیز از ایده‌ی ergodicity سیستم آشوبی استفاده شده است.

هم‌زمانی^{۵۹}

هم‌زمانی سیستم‌های دینامیکی پدیده‌ایست که در سال‌های اخیر توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. هم‌زمانی دو سیستم دینامیکی به زبان ساده یعنی اعمال تغییراتی در دو سیستم به طوری که هر دوی آن‌ها یک رفتار از خود نشان دهند. به عنوان مثال در بسیاری از روش‌های انتقال داده در سیستم‌های مخابراتی، طرف گیرنده و فرستنده - هر دو - می‌بایست به یک سیگنال حامل^{۶۰} یک‌سان دسترسی داشته باشند. یک‌سان بودن سیگنال در مخابرات کلاسیک معادل هم فرکانس و هم فاز بودن دو سیگنال سینوسی است. از طرف دیگر، هم‌زمانی در سیستم‌های آشوب‌ناک نیز به دلیل کاربردهای احتمالی و متنوع‌اش (به عنوان مثال در مخابرات ایمن^{۶۱}) مهم است. در این نوع هم‌زمانی خروجی دو سیستم آشوب‌ناک می‌بایست به وسیله‌ی کنش‌ای که دو سیستم توسط سیگنال کنترلی بر هم می‌گذارند، تا حد ممکن یک‌سان شود. نکته‌ی مهم و قابل توجه این است که چنین کاری تا چند سال پیش غیرممکن تلقی می‌شد. دلیل این تصور، ناپایداری ذاتی سیستم‌های آشوبی است (که مثلاً با مثبت بودن Lyapunov Exponent آن نمود پیدا می‌کند) که باعث می‌شود برخلاف خیلی از سیستم‌های دیگر مانند نوسان‌سازهای سینوسی تفاوت بسیار جزئی در شرایط اولیه دو سیستم، تغییرات قابل توجهی در نتیجه‌ی نهایی ایجاد کند. پس سعی در تنظیم دقیق پارامترها و شرایط اولیه دو سیستم آشوبی، محکوم به شکست است. با این حال در سال ۱۹۹۰، Pecora و Carroll نشان دادند که در شرایطی با ایجاد سیگنال خطای و اعمال آن به سیستم، می‌توان آن دو را هم‌زمان کرد [Pecora90]. پیش از معرفی این روش خوب است هم‌زمانی را به طور ریاضی فرمول‌بندی کنیم [Nijmeijer97].

فرض کنید k سیستم به هم متصل زیر را داشته باشیم:

$$S_i : \dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_k, t), \quad i = 1, \dots, k \quad (70)$$

که در آن $F_i : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{R}^{n_k} \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$ برای هر $t \in \mathcal{R}$ ، اپراتور انتقال زمانی را به صورت $(S_t x)(t) = x(t + t)$ تعریف می‌کنیم. تابع Q را بر روی $x_i(t)$ ها تعریف می‌کنیم.

تعریف هم‌زمانی: پاسخ $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، ... و $x_k(t)$ سیستم‌های S_1 ، S_2 ، ... و S_k با شرایط اولیه $x_1(0)$ ، $x_2(0)$ ، ... و $x_k(0)$ را با توجه به فراتابع^{۶۲} $Q_i(x_1, \dots, x_k, t)$ هم‌زمان است اگر

$$Q_i(S_{t_1} x_1, \dots, S_{t_k} x_k, t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (71)$$

به ازای $\forall t \in \mathcal{R}$ و مقادیری از t_1, \dots, t_k . این سیستم‌ها به طور تقریبی هم‌زمان‌اند اگر همه‌ی شرایط مانند قبل باشد و هم‌چنین وجود داشته باشد $e \in \mathcal{R}$ که

$$|Q_i(S_{t_1} x_1, \dots, S_{t_k} x_k, t)| < e, \quad i = 1, \dots, k \quad (72)$$

⁵⁹ Synchronization

⁶⁰ Carrier Signal+

⁶¹ Secure Communication

⁶² Functional

در ضمن S_1, \dots, S_k به طور مجانبی همزمان است اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(s_{t_1} x_1, \dots, s_{t_k} x_k, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (73)$$

همه‌ی این تعاریف اگر به جای $Q_i(x_1, \dots, x_k, t)$ ها از $Q_i(y_1, \dots, y_k, t)$ استفاده کنیم که $y_i(t) = h_i(x_i(t))$ خروجی سیستم‌ها باشند به همزمانی خروجی^{۶۳} نیز قابل تعمیم است. برای تعمیم بیش‌تر می‌توان t_i ها را نیز متغیر با زمان‌ای که گرفت که دارای حد مشخص و ثابت‌ای هستند. حالت خاص این تعاریف وقتی است که برای ارتباط دو سیستم تعریف کنیم:

$$Q_1(x_1, x_2) = Q_2(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) = |x_1(t) - x_2(t)| \quad (74)$$

اینک مساله‌ی همزمانی کردن دو سیستم معادل می‌شود به صورت پیدا کردن سیگنال کنترلی‌ای که این سیستم‌ها را با توجه به یکی از این شرایط همزمانی، همزمان کند.

فرض کنیم می‌خواهیم دو سیستم S_1 و S_2 را همزمان کنیم. دو استراتژی‌ی مختلف همزمانی را می‌توان در نظر گرفت:

- همزمانی ارباب-رعیتی^{۶۴} (یا محرک-پاسخ‌ده^{۶۵})
- همزمانی متقابل

در روش اول، یکی از سیستم‌ها نقش نسخه‌ی مرجع را ایفا می‌کند و دیگری سعی می‌کند با دریافت نمونه‌ای از آن نسخه‌ی مرجع تا حد ممکن با آن همزمان شود. پس یکی از سیستم‌ها عملاً هیچ تغییری در خودش نمی‌دهد و سیگنال کنترلی فقط به دومی اعمال می‌شود. می‌توان نمونه‌های مشابه‌ای از این دیدگاه همزمانی را در تئوری کلاسیک کنترل نیز یافت. به عنوان مثال، کنترل مدل-مرجع^{۶۶} دقیقاً به همین صورت است و کنترلر می‌بایست رفتار سیستم کنترل‌شونده را جوری هدایت کند که مانند سیستم مرجع‌ای که به طور جداگانه مشخص شده است رفتار کند. یا به عنوان مثالی دیگر، این شبیه به رفتار یک رویت‌گر^{۶۷} در کنترل کلاسیک است که می‌بایست با استفاده از اطلاعات دریافت شده از یک سیستم دیگر، حالت درونی‌ی آن را تخمین بزند. به همین دلیل، این نوع روی کرد برای طراحی سیستم همزمان‌ساز به روی کرد همزمان‌سازهای رویت‌گری^{۶۸} نیز مشهور است.

همزمانی به روش تجزیه محرک-پاسخ‌گو

اینک ایده‌ی اساسی چند روش مختلف برای همزمان‌سازی دو سیستم آشوبی را معرفی می‌کنم. ابتدا ایده‌ی محرک-پاسخ‌گوی Pecora و Carroll که اولین روش همزمانی سیستم‌های آشوبی است [Pecora90]. فرض کنید می‌خواهیم دو نسخه‌ی یک‌سان از سیستم دینامیکی

⁶³ Output Synchronization

⁶⁴ Master-Slave

⁶⁵ Drive-Response

⁶⁶ Model Reference Control

⁶⁷ Observer

⁶⁸ Observer-Based Synchronization

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathfrak{R}^n \quad (75)$$

را با هم هم‌زمان کنیم (مثلا این می‌تواند دو نوسان‌ساز یک‌سان باشد که شرایط اولیه‌ی متفاوتی دارند و به دلیل طبیعت آشوبی‌شان با گذر زمان تفاوت حالت زیادی پیدا می‌کنند). یکی از سیستم‌ها را محرک می‌گیریم و دیگری را پاسخ‌ده و آن‌ها را بدین صورت تجزیه می‌کنیم:

$$\text{Drive System : } \begin{cases} \dot{z}_d = Z(z_d, y_d) \\ \dot{y}_d = Y(z_d, y_d) \end{cases} \quad (76)$$

$$\text{Response System : } \begin{cases} \dot{z}_r = Z(z_r, y_d) \\ \dot{y}_r = Y(z_r, y_r) \end{cases} \quad (77)$$

توجه کنید که در سیستم پاسخ‌ده، بخش‌ای از دینامیک توسط سیگنال y_d تحریک می‌شود. شرط هم‌زمانی را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_d(t) - z_r(t)| \rightarrow 0 \quad (78)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_d(t) - y_r(t)| \rightarrow 0 \quad (79)$$

حال اگر دینامیک خطا را به صورت زیر بنویسیم:

$$\dot{e}_z = f_0(e_z, t) \quad (80)$$

$$\dot{e}_y = f_1(e_z, e_y, t) \quad (81)$$

که در آن $e_z = z_d - z_r$ و $e_y = y_d - y_r$ ، آن‌گاه قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه: فرض کنید:

(۱) به ازای هر شرایط اولیه‌ی $(z_d(0), z_r(0), y_d(0), y_r(0))$ پاسخ‌های $z_d(t)$ و $y_d(t)$ در بازه‌های زمانی بی‌نهایت بزرگ وجود دارند و نقطه‌ی تعادل $e_z = 0$ در $\dot{e}_z = f_0(e_z, t)$ ، به طور عمومی یک‌نواخت پایدار مجانبی^{۶۹} باشد.

(۲) $\dot{e}_y = f_1(e_z, e_y, t)$ پایدار ورودی-به-حالت^{۷۰} (ISS) با ورودی‌ی e_z باشد. در آن صورت به ازای هر شرایط اولیه‌ای، هدف هم‌زمانی برآورد می‌شود.

به عنوان نمونه، هم‌زمانی‌ی دو سیستم دینامیکی لورنتس^{۷۱} را که می‌تواند به ازای پارامترهای خاصی رفتار آشوبی داشته باشد بررسی می‌کنیم [Lorenz63]. معادلات دینامیک بدین صورت‌اند:

⁶⁹ Globally Uniformly Asymptotically Stable

⁷⁰ Input-to-State Stable

⁷¹ Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = s(y-x) + u \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (82)$$

که در آن $s, r, b > 0$ هستند. بدون وارد شدن به جزئیات می‌توان نشان داد که حالت‌های این دینامیک کران‌دار^{۷۲} است. حال اگر بخواهیم هدف هم‌زمانی را برای این دو سیستم اعمال کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = s(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = rx_1 - y_1 - x_1 z_1 \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (83)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = s(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = rx_2 - y_2 - x_2 z_2 \\ \dot{z}_2 = -bz_2 + x_2 y_2 \end{cases} \quad (84)$$

توجه کنید که معادله‌ی اول زیرسیستم Y را می‌سازد و x_1 نیز به عنوان سیگنال محرک عمل می‌کند. معادلات خطا را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = s(e_y - e_x) \\ \dot{e}_y = -e_y + x_1 e_z \\ \dot{e}_z = -be_z + x_1 e_y \end{cases} \quad (85)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که سیستم تشکیل شده از $[\dot{e}_y \quad \dot{e}_z]^T$ ، خاصیت (۱) را دارد. اگر انتخاب کنیم:

$$V(e_y, e_z) = \frac{(e_y^2 + e_z^2)}{2} \quad (86)$$

خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e_y, e_z) = -e_y^2 - be_z^2 \leq -\max(2, 2b)V(e_y, e_z) \quad (87)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $V(e_y, e_z)$ به صورت نمایی کاهش می‌یابد. همچنین معادله:

$$\dot{e}_x = se_x \quad (88)$$

پایدار نمایی است و $\dot{e}_x = S(e_y - e_x)$ با ورودی e_y ، ISS خواهد بود (به دلیل کران‌دار بودن e_y و پایداری نمایی). پس شرایط قضیه برقرار است و دو سیستم هم‌زمان خواهند شد. اگر به جای x_1 از y_1 برای هم‌زمانی استفاده کنیم، باز می‌توان اثبات کرد که دو سیستم هم‌زمان خواهند شد. اما اگر z_1 را به عنوان سیگنال هم‌زمانی بگیریم، می‌توان نشان داد که قادر به هم‌زمانی نخواهیم بود. در واقع با این‌که می‌توان نشان داد که با هر سیگنال اسکالری می‌توان دو سیستم را هم‌زمان کرد، اما این سیگنال الزاماً یکی از حالت‌های سیستم اصلی نخواهد بود [Wang98].

هم‌زمانی با روش‌های مبتنی بر پسیو بودن^{۷۳}

به عنوان نمونه‌ای دیگر از روش‌های هم‌زمانی، روشی را معرفی می‌کنم که بر اساس ایده‌ی passivity عمل می‌کند. پیش از معرفی روش، تعاریفی را بیان می‌کنم [Pogromsky98].

سیستم دینامیکی مستقل از زمان زیر را - که افاین در ورودی کنترل است - در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (89)$$

که در آن $x(t) \in \mathcal{X}^n$ حالت سیستم، $u(t) \in \mathcal{U}^m$ ورودی سیستم که فرض می‌شود کران‌دار و پیوسته باشد، $y(t) \in \mathcal{Y}^l$ خروجی آن و $f: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$ و $g: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^{n+m}$ ماتریس‌های همواری^{۷۴} هستند. همچنین $f(0) = 0$ است و $h: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}^l$ نیز نگاشتی هموار است. سیستم semipassive را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف Semipassive بودن: سیستم مشخص شده در بالا semipassive است اگر تابع پیوسته‌ی غیرمنفی‌ی $V: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$ و تابع $H: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{R}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر شرایط اولیه و هر ورودی قابل قبول، ناتساوی اتلاف^{۷۵} زیر به ازای زمان‌های $0 \leq t_0 \leq t < T_{u,x_0}$ که T_{u,x_0} حد بالایی‌ست از زمان وجود پاسخ برای معادلات پیشین در آن برقرار باشد:

$$V(x(t), t) - V(x(t_0), t_0) \leq \int_{t_0}^t (u(t), y(t) - H(x(t))) dt \quad (90)$$

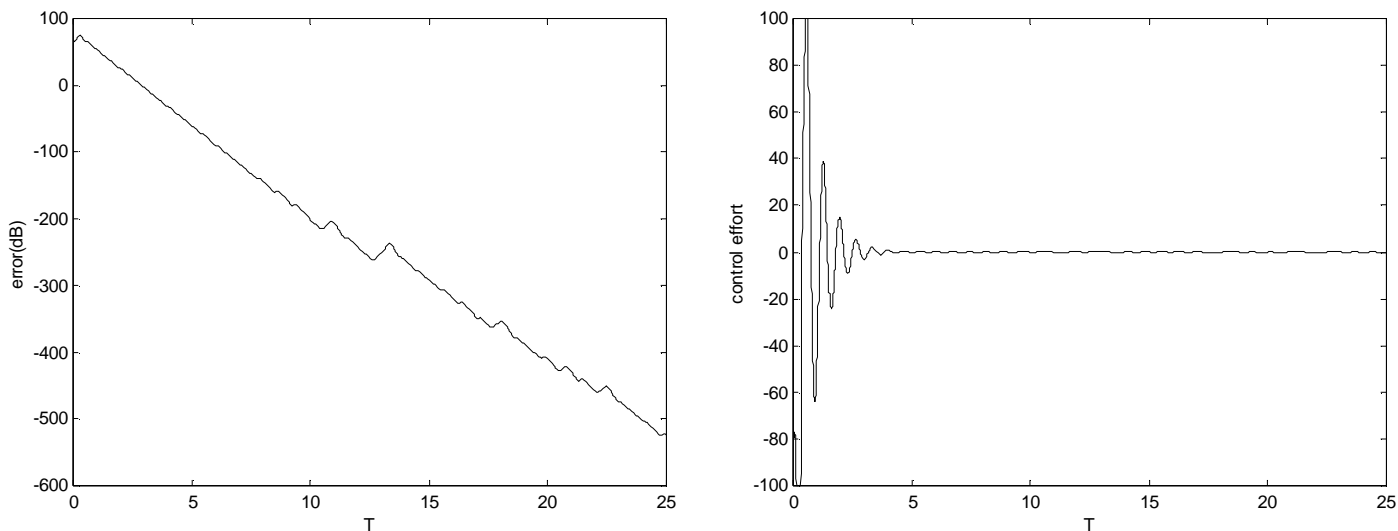
و در آن H در بیرون کره‌ای نامنفی‌ست، یعنی:

$$\exists r > 0; |x| > r \Rightarrow H(x) \geq 0 \quad (91)$$

⁷³ Passivity-based Synchronization

⁷⁴ Smooth

⁷⁵ Dissipation



شکل 14. اندازه‌ی خطا (در مقیاس لگاریتمی) و سیگنال کنترلی برای هم‌زمان‌سازی دو دینامیک لورنز با استفاده از روش‌های Passivity-based به ازای $S = 10$ و $r = 28$ و $b = 8/3$

حال اگر دو سیستم زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i) + g_1(x_i)u_i \\ y_i = h_i(x_i) \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (92)$$

و ورودی آن‌ها را بدین صورت تعریف کنیم:

$$u_1 = -g(y_1 - y_2), u_2 = -g(y_2 - y_1) \quad (93)$$

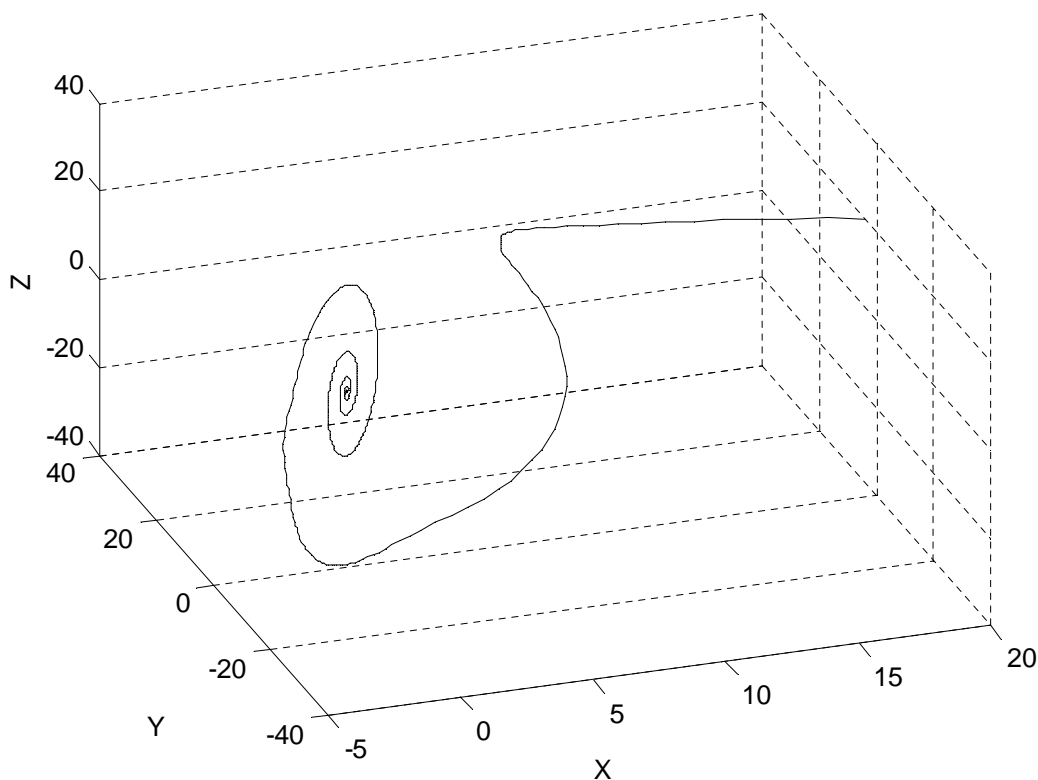
که در آن g عدد مثبت (یا ماتریس مثبت-معین⁷⁶) باشد، آن‌گاه می‌توان اثبات کرد که همه‌ی پاسخ‌های سیستم کوپل شده، کران‌دار هستند.

حال اگر فرض کنیم که سیستم مشخص شده در بالا دارای رتبه‌ی نسبی $(1, \dots, 1)^T$ باشد، آن‌گاه می‌توان آن را به فرم

$$\begin{cases} \dot{y}_i = a(z_i, y_i) + b_i(z_i, y_i)u_i \\ \dot{z}_i = q(z_i, y_i) \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (94)$$

در آورد. آن‌گاه قضیه‌ی زیر در مورد هم‌زمانی آن‌ها صادق است.

⁷⁶ Positive Definite



شکل 15. مسیر فاز دینامیک خطا در فرآیند همزمان‌سازی دو سیستم لورنز با استفاده از روش‌های Passivity-based به ازای $b = 8/3$ و $r = 28$ ، $S = 10$

قضیه: فرض کنید که

(۱) توابع q, a, b_1, b_2 پیوسته و به طور محلی لیبشیتز باشد.

(۲) سیستم‌های (۹۴) از ورودی u_i به خروجی y_i semipassive باشد و دارای تابع ذخیره‌ی $V_i: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}_+$ بی‌کران باشند.

(۳) تابع مثبت-معین $V_0: \mathcal{R}^{n-m} \mapsto \mathcal{R}_+$ با همواری C^2 و هم‌چنین عدد مثبت a وجود داشته باشد به طوری که ناتساوی زیر به ازای همه‌ی $z_1, z_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$ و $y_1 \in \mathcal{R}^m$ برقرار باشد:

$$(\nabla V_0(z_1 - z_2))^T (q(z_1, y_1) - q(z_2, y_1)) \leq -I \|z_1 - z_2\|^2 \quad (95)$$

(۴) ماتریس $b_1(z_1, y_1) + b_2(z_2, y_2)$ مثبت معین باشد.

آن‌گاه به ازای هر شرایط اولیه‌ای، \bar{g} وجود دارد که به ازای $g > \bar{g}$ همه‌ی حالت‌های سیستم متصل شده کران‌دارند و هم‌چنین هدف هم‌زمانی نیز تامین می‌شود.

این که مقدار \bar{g} چقدر است به مدل سیستم و شرایط اولیه بستگی دارد. روش تطبیقی‌ای^{۷۷} مبتنی بر روش Speed Gradient برای به دست آوردن g وجود دارد که از آوردن آن صرف‌نظر می‌شود (برای مطالعه درباره‌ی روش SG، می‌توانید به [Fradkov96] مراجعه کنید). نمونه‌ای از خطای بین حالت‌ها و هم‌چنین اندازه‌ی سیگنال کنترلی را برای هم‌زمانی دو دینامیک لورنز در شکل (۱۴) می‌بینید. در شکل (۱۵)، مسیر حالت خطای بین دو سیستم نمایش داده شده است

علاوه بر آن در [Farahmand03a] نیز ایده‌های پیشین به خانواده‌ی غیرخطی‌ای از کوپلینگ‌ها به فرم

$$u_1 = -ga(y_1 - y_2), u_2 = -u_1 \quad (96)$$

با قیدهای

$$y^T a(y) \geq 0 \quad (97)$$

$$y^T a(y) \geq \bar{g} \|y\|^2 \quad (98)$$

تعمیم داده شده است. با استفاده از این نتایج می‌توان خانواده‌ی وسیعی از کنترلهای غیرخطی را (که می‌توانند شامل کنترلهای هوش‌مند مانند کنترلهای عصبی و فازی هم باشند) برای هم‌زمان‌سازی دو سیستم آشوبی به کار برد. در آزمایش‌هایی مشاهده شد که کنترلر غیرخطی می‌تواند سریع‌تر خطا را به صفر میل دهد.

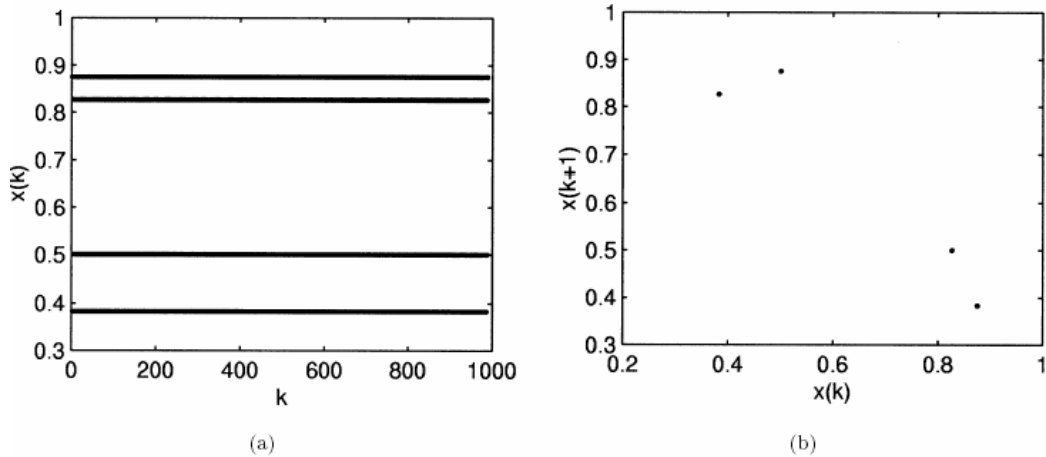
پادکنترل آشوب

هدف اصلی‌ی مهندسی کنترول تا چندی پیش ایجاد سیستم‌های پایدار بود. اکثر طراحی‌ها به گونه‌ای انجام می‌شد که سیگنال مورد نظر بر مقدار از پیش تعیین شده‌ای پایدار شود یا این که سیگنال دیگری را تعقیب کند. ناپایداری در مهندسی کنترول نامطلوب شناخته می‌شد و دقیقاً به همین دلیل، اکثر تئوری‌ی کنترول درباره‌ی ایده‌های پایداری‌ست. با در نظر گرفتن این دیدگاه، آشوب نامطلوب محسوب می‌شد. روش‌های مختلفی برای پایداری‌ی یک سیستم آشوبی –چه تعادل پایدار و چه چرخه‌ی حدی پایدار– مطرح شده است که بعضی از آن‌ها را در قسمت‌های قبل مشاهده کردید. با این وجود، اخیراً کاربردهایی مطرح شده است که ایجاد سیگنال آشوبی نه تنها مضر نیست، بلکه مطلوب هم هست. به عنوان مثال می‌توان به کاربرد آن در مخلوط کردن مایعات که باعث سریع‌تر شدن آن عمل نسبت به حرکت تناوبی می‌شود ([Ottino92]) و ایجاد سیگنال آشوبی برای مخابرات ایمن اشاره کرد ([Yang04]). در این بخش خلاصه‌ای از چند روش برای پادکنترول آشوب ارائه می‌دهم.

فرض کنید سیستم گسسته-زمان زیر را داشته باشیم:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + u_k \\ x_k &\in \mathcal{X}^n, u_k \in \mathcal{U}^n \end{aligned} \quad (99)$$

⁷⁷ Adaptive



شکل 16. نمودار تناوب-۴ پایدار برای logistic map با $p=3.5$ - شکل (a) نمودار در طول زمان آن است و شکل (b) نگاشت $x(k+1)$ به $x(k)$ آن

که در آن $f(x_k)$ به طور پیوسته مشتق پذیرست و $f(0) = 0$ و در نتیجه $x^* = 0$ نقطه‌ی تعادل سیستم بدون کنترل ($u_k = 0$) آن است. می‌خواهیم با استفاده از سیگنال کنترلی u_k این سیستم را آشوبی کنیم. در ضمن می‌خواهیم اندازه‌ی u_k محدود باشد، یعنی:

$$\|u_k\|_{\infty} \leq e, \forall k \geq 0 \quad (100)$$

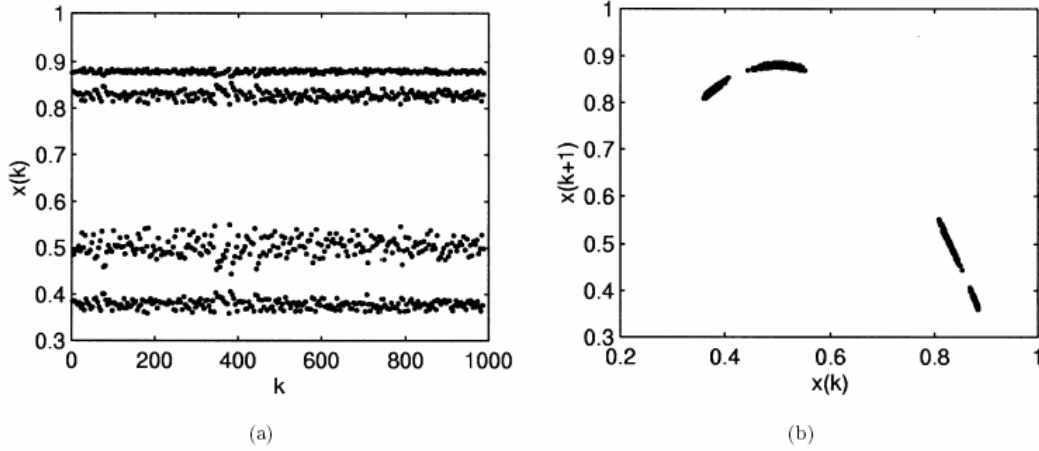
ایده‌ی کلی‌ی این روش (و روش‌های آشوبی‌سازی دیگر)، مثبت کردن Lyapunov Exponent سیستم کنترل شده است در حالی که پاسخ سیستم کران‌دار باقی بماند. اگر به یاد داشته باشید، در قسمت‌های پیشین گفتیم که ویژگی مشترک همه‌ی تعاریف آشوب (مثلاً تعریف Fradkov) وجود ناپایداری و در همان حال، کران‌دار بودن پاسخ است. برای چنین کاری، می‌توان سیگنال کنترل را بدین صورت انتخاب کرد:

$$u_k = s x_k \pmod{e} \quad (101)$$

که در آن \pmod{e} به این معناست که اگر قدرمطلق پاسخ بزرگ‌تر از e شد، آن قدر از (به) آن کم (یا زیاد) می‌شود که بین $(-e, e)$ بیافتد. در این صورت می‌توان مطمئن بود که اندازه‌ی سیگنال کنترل بیش از e نخواهد شد. می‌توان نشان داد که در صورتی که $s \gg 1$ باشد، این سیستم در اطراف نقطه‌ی تعادل قبلی‌اش آشوبی خواهد بود. این روش به نام روش Chen-Lai معروف است. برای دقیق‌تر بیان شدن گزاره‌های پیشین، به قضیه‌ی زیر توجه کنید [Wang00a]:

قضیه: فرض کنید که مبدا سیستم (۹۹) پایدار نمایی باشد. آن‌گاه کنترلی به شکل (۱۰۱) را در نظر بگیرید. آن‌گاه دو عدد مثبت r و q وجود دارند که به ازای $e < q$ و $\|x_0\| < re$ داشته باشیم:

$$\|x_k\| < re, \forall k > 0 \quad (102)$$



شکل 18. رفتار آشوبی برای logistic map کنترل شده به ازای $p = 3.5, s = 10, e = 0.01$

علاوه بر آن، عدد N را به که به صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$N \geq \|f'(x)\|, \text{ for } \|x\| < re \quad (103)$$

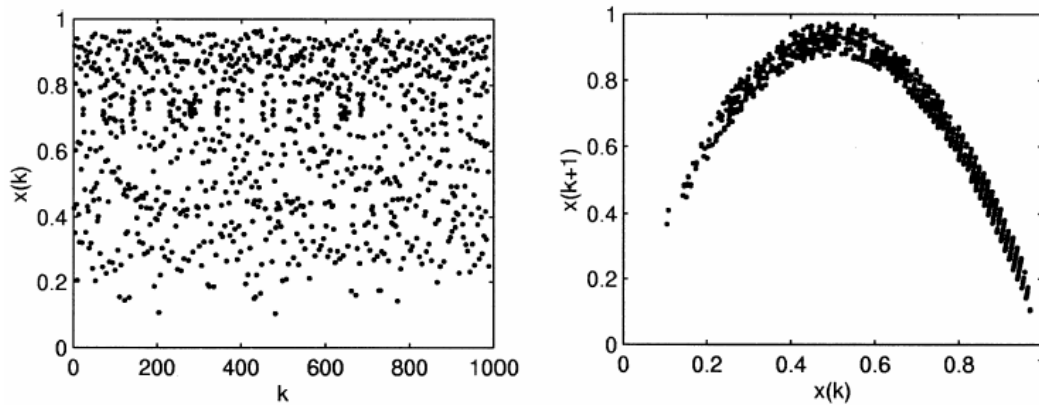
اگر

$$s \geq N + e^c \quad (104)$$

که c عدد مثبتی است، آن گاه همگی Lyapunov Exponent های سیستم کنترل شده، کاملاً مثبت خواهد بود.

نتیجه مشابهی برای سیستم‌های که مبدایشان پایدار نیست نیز وجود دارد که از آوردن آن صرف نظر می‌شود [Wang00a].

شبیه‌سازی‌هایی از تاثیر این روش بر روی سیستم logistic map زیر



شکل 17. رفتار آشوبی برای logistic map کنترل شده به ازای $p = 3.5, s = 10, e = 0.01$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= px_k(1 - x_k) + u_k \\u_k &= sx_k \pmod{e}\end{aligned}\tag{105}$$

به ازای پارامتری که به خودی خود آشوبی نیست ($p = 3.5$) (شکل (۱۶)) را در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) می‌بینید. مشاهده می‌شود که حتی به ازای مقادیر بسیار کوچک e (که اندازه‌ی سیگنال کنترلی را مشخص می‌کند)، رفتار آشوب‌گونه می‌شود.

در مراحل به دست آمدن این قضیه اثبات می‌شود که Lyapunov Exponent سیستم، مثبت می‌شود و هم‌چنین پاسخ‌ها کران‌دار باقی خواهند ماند. این‌ها شرایط لازم برای آشوبی بودن یک سیستم‌اند، اما به هیچ‌وجه شرایط کافی‌ای نیستند. در بخش‌های پیشین توضیح دادم که تعریف همه‌باوری درباره‌ی آشوب وجود ندارد، اما تعریف‌هایی مانند تعریف Li-Yorke تقریباً قابل قبول است. برای همین در این‌گونه قضایا، سعی می‌شود که برقراری‌ی چنان شرطی با استفاده از قضیه‌ی Marotto ثابت شود (قضیه‌ی Marotto برای اثبات آشوبی بودن از نوع Li-Yorke است). در نتیجه می‌توان مطمئن بود که سیستم حاصل شده با توجه به تعریف مشخصی آشوبی است. تعمیم‌های مختلفی از این روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از توابعی مانند دندان-اره‌ای یا سینوسی به جای mod استفاده کرد [Wang00b]. هم‌چنین می‌توان به تدریج سیگنال را به سمت آشوبی بودن (مثبت بودن Lyapunov Exponent) میل داد. چنین کاری به روش Lai-Chen معروف است (توجه کنید که روش پیشین، Chen-Lai نام داشت).

کنترل دوشاخگی

در این نسخه‌ی گزارش توضیح بیش‌تری نسبت به آنچه در مقدمه گفته شد درباره‌ی دوشاخگی و کنترل آن داده نمی‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند به [Abed86] و [Abed87] که ایده‌های اصلی‌ی کنترل دوشاخگی در آن معرفی شده است و [Abed93] که خلاصه‌ای از کارهای انجام شده تا سال ۱۹۹۳ و هم‌چنین [Wang92] برای کاربردی از آن تئوری‌ها مراجعه کنند. هم‌چنین در [Chen00b] خلاصه‌ای از روش‌های مختلف کنترل دوشاخگی تا سال ۲۰۰۰ جمع‌آوری شده است.

منابع

- [Abed86] E. H. Abed and J.-H. Fu, "Local feedback stabilization and bifurcation control, I. Hopf Bifurcation," Systems & Control Letters, vol. 7, pp.11-17, 1986.
- [Abed87] E. H. Abed and J.-H. Fu, "Local feedback stabilization and bifurcation control, II. Stationary Bifurcation," Systems & Control Letters, vol. 8, pp. 467-473, 1987.
- [Abed93] E.H. Abed and H.O. Wang, "Feedback Control of Bifurcation and Chaos in Dynamical Systems," in N.S. Namachchivaya and W. Kliemann (eds.), Recent Developments in Stochastic and Nonlinear Dynamics: Applications to Mechanical Systems, CRC Press, 1993.
- [Andrevskii03] B.R. Andrevskii and A. L. Fradkov, "Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods," Automation and Remote Control, vol. 64, no. 5, pp. 675-718, 2003.
- [Andrevskii04] B.R. Andrevskii and A. L. Fradkov, "Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications," Automation and Remote Control, vol. 65, no. 4, pp. 505-533, 2004.

6. [Boccaletti00] Boccaletti, Grebogi, Lai, Mancini, and Maza, "The Control of Chaos: Theory and Applications," *Physics Report* 329, pp. 103-197, 2000.
7. [Brandt00] M.E. Brandt and G. Chen, "Delay Feedback Control of Cardiac Activity Models," in G. Chen (ed.), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering Systems*, CRC Press, 2000.
8. [Cai02] C. Cai, Z. Xu, and W. Xu, "Melnikov's Analysis of Time-Delayed Feedback Control in Chaotic Dynamics," *IEEE Trans. on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 12, pp. 1724-1728, 2002.
9. [Chen97] G. Chen, "Control and Anticontrol of Chaos", *Proc. Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos*, St. Petersburg, Russia, pp. 181-186, 1997.
10. [Chen99a] G. Chen and X. Yu, "On Time-Delayed Feedback Control of Chaotic Systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 6, pp. 767-772, 1999.
11. [Chen00a] G. Chen, *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering Systems*, edited book, CRC Press, 2000.
12. [Chen00b] G. Chen, J.L. Moiola, and H.O. Wang, "Bifurcation Control: Theories, Methods, and Applications," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 3, pp. 511-548, 2000.
13. [Chen03] L. Chen, X.F. Wang, and Z.Z. Han, "Controlling Bifurcation and Chaos in Internet Congestion Control Model," ?, 2003.
14. [Devaney87] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamics Systems*, New York: Addison-Wesley, 1987.
15. [Farahmand03a] A.M. Farahmand and M.J. Yazdanpanah, "A Class of Nonlinear Controllers for Synchronization of Chaotic Semipassive systems," unpublished.
16. [Farahmand03b] A.M. Farahmand and P. Jabehdar Maralani, "Stabilizing Chaotic Systems with Small Control Signal," unpublished.
17. [Fradkov96] A.L. Fradkov and A.Y. Pogromsky, "Speed Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 43, no. 11, pp. 907-913, 1996.
18. [Fradkov98] A.L. Fradkov and A. Yu. Pogromsky, *Introduction to control of oscillations and chaos*. World Scientific, Singapore, 1998.
19. [Fradkov01] Fradkov and Evans, "Control of Chaos: Some Open Problems," *Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control*, 2001.
20. [Fradkov02] Fradkov and Evans, "Control of Chaos: Survey 1997-2000", *Preprints of 15th IFAC World Congress on Automatic Control. Plenary papers, Survey papers, Milestones. Barcelona*, pp. 143-154, 2002.
21. [Garfinkel92] A. Garfinkel, M.L. Spano, W.L. Ditto, and J. N. Weiss, "Controlling Cardiac Chaos," *Science*, vol. 257, pp. 1230-1235, 1992.
22. [Guan00] Z. H. Guan, G. Chen, T. Ueta, "On Impulsive Control of a Periodically Forced Chaotic Pendulum System," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, no. 9, 2000.
23. [Harb02a] A. Harb, A. Zaher, and M. Zohdy, "Nonlinear Recursive Chaos Control," *Proc. American Control Conf.*, 2002.
24. [Harb02b] A. Harb and M. Zohdy, "Chaos and Bifurcation Control Using Nonlinear Recursive Controller," *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, vol. 7, no. 2, pp. 37-43, 2002.
25. [Hunt91] E. R. Hunt, "Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System- The Diode Resonator," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, pp. 1953-1955, 1991.
26. [Jiang02] G.P. Jiang, G. Chen, and W.K. Tang, "Stabilizing Unstable Equilibrium Points of a Class of Chaotic Systems Using a State PI Regulator," *IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 12, 2002.
27. [Kousaka01] T. Kousaka, S. Tahara, T. Ueta, M. Abe, and H. Kawakami, "Chaos in simple hybrid system and its control," *Electronic Letters*, vol. 37, no. 1, 2001.
28. [Lakshmikantham89] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*. London, U.K.:World Scientific, 1989.

29. [Li75] T.Y. Li and J. A. Yorke, "Period Three Implies Chaos," *Amer. Math. Monthly* 82, pp. 481-485, 1975.
30. [Li01] Z.G. Li, C.Y. Wen, and Y.C. Soh, "Analysis and Design of Impulsive Control Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 46, no. 6, 2001.
31. [Li03] C. Li and G. Chen, "On the Marotto-Li-Chen Theorem and its Application to Chaotification of Multi-dimensional Discrete Dynamical Systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 18, pp. 807-817, 2003.
32. [Lorenz63] E.N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130-141, 1963.
33. [Marotto78] F.R. Marotto, "Snap-back repellers imply chaos in \mathfrak{R}^n ," *Journal of Math. Anal. Appl.* 63, pp. 199-223, 1978.
34. [Nijmeijer97] H. Nijmeijer, I.I. Blekhnman, A. L. Fradkov, A. Y. Pogromsky, "Self-synchronization and controlled synchronization," in *1st Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos*, pp. 36-41, 1997.
35. [Ott90] Ott, E., C. Grebogi, and J. Yorke, (1990), *Controlling chaos*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64(11), 1196-1199.
36. [Pecora90] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, pp. 821-824, 1990.
37. [Ottino92] J. M. Ottino et al., "Chaos, symmetry, and self-similarity: Exploiting order and disorder in mixing processes," *Science* 257, pp. 754-760, 1992.
38. [Pogromsky98] A.Y. Pogromsky, "Passivity-based Design of Synchronization Systems," *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 8(2), 1998.
39. [Pyragas92] Pyragas K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A.*, vol.170, 421-428.
40. [Roy93] R. Roy, T. W. Murphy, T.D. Maier, Z. Gillis, and E.R. Hunt, "Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally Coupled System," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 1259-1262, 1993.
41. [Suykens00] J.A.K. Suykens, T. Yang, J. Vandewalle, and L.O. Chua, "Impulsive Control and Synchronization of Chaos," in G. Chen (ed.), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering Systems*, CRC Press, 2000.
42. [Takens80] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in D.A. Rand, L.-S. Young (eds.), *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer, New York, 1980, pp. 366-381.
43. [Vincent00] T.L. Vincent, "Utilizing Chaos in Control System Design," in G. Chen (ed.), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering Systems*, CRC Press, 2000.
44. [Wang92] H.O. Wang and E.H. Abed, "Bifurcation Control of Chaotic Dynamical Systems," 2nd IFAC Nonlinear Control Symposium, 1992.
45. [Wang98] X. F. Wang and Z. Q. Wang, "Synchronizing Chaos and Hyperchaos with Any Scalar Transmitted Signal," 1998.
46. [Wang00a] X.F. Wang and G. Chen, "Chaotification via Arbitrarily Small Feedback Controls: Theory, Method, and Applications," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 3, pp. 549-670, 2000.
47. [Wang00b] X.F. Wang and G. Chen, "Chaotifying a Stable LTI System by Tiny Feedback Control," *IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 2000.
48. [Yang97] T. Yang and L. O. Chua, "Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication," *IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, pp. 976-988, Oct. 1997.
49. [Yang04] T. Yang, "A Survey of Chaotic Secure Communication Systems," *International Journal of Computational Cognition*, vol. 2, no. 2, pp. 81-130, 2004.
50. [Yu00a] Yu, Chen, Song, Cao, and Xia, "A Generalized OGY Method for Controlling Higher Order Chaotic Systems," 2000.
51. [Yu00b] X. Yu, Y. Tian, and G. Chen, "Time Delayed Feedback Control of Chaos," in *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, edited by G. Chen, 2000.

52. [Yu01] Yu, G. Chen, Xia, Song, and Cao, "An Invariant-Manifold-Based Method for Chaos Control," 2001.